

# Inférence dans les HMM hiérarchiques et factorisés : changement de représentation vers le formalisme des Réseaux Bayésiens.

Sylvain Gelly\*, Nicolas Bredeche\*, Michèle Sebag\*

\*Equipe Inference&Apprentissage - Projet TAO (INRIA futurs),  
LRI, Université Paris-Sud, 91504 Orsay Cedex  
(gelly,bredeche,sebag)@lri.fr

## 1 Présentation du problème

Une limite essentielle des HMM, et plus généralement des modèles de Markov, concerne le passage à l'échelle, l'impossibilité de la prise en compte efficace de l'influence de phénomènes indépendants et la difficulté de généralisation.

Pour répondre à ces problèmes, plusieurs extensions existent. En particulier, nous nous intéresserons dans ce qui suit à la *hiérarchisation* (Theocharous et al. 2001, 2004) et à la *factorisation* (Ghahramani 1996).

La hiérarchisation permet de réduire le nombre de liens entre états nécessaires dans un HMM et par là même de réduire la complexité algorithmique de l'apprentissage ainsi que l'imprécision. Quant à la factorisation, le principe est d'expliquer les observations par plusieurs causes plutôt qu'une seule. C'est à dire qu'on remplace le  $P(Y|X)$  des HMM par  $P(Y|X^1, X^2, \dots, X^n)$ . Les  $X^i$  sont des variables cachées pouvant être gérées indépendamment. Les  $P(X_{t+1}^i | X_t^i)$  sont alors différents pour chaque  $i$ .

- L'existence de dépendances multiples dans les FHHMM entraîne a priori une explosion combinatoire du nombre de paramètres à apprendre, ce qui est d'autant plus problématique lorsque peu d'exemples sont à notre disposition (ceci est une propriété inhérente à la robotique);
- La présence de circuits dans les dépendances conditionnelles entre les variables d'un FHHMM empêchent la modélisation directe par un réseau bayésien. Il est à noter que ces dépendances ne concernent les variables qu'à un même pas de temps (synchrones).

Dans la suite de cet article, nous ne ferons pas de différence entre les dépendances synchrones et les transitions temporelles, les deux types étant des *dépendances conditionnelles* entre deux variables.

On ne peut ainsi pas adapter directement les algorithmes existants dans le cas des HMM factorisés, ou hiérarchiques.

Un aspect important du problème est que notre système apprend à partir de données éparées car nous faisons l'hypothèse que nous ne disposons que d'un petit nombre d'exemples pour apprendre. Ceci se justifie par le domaine d'application (la robotique située), où le processus d'échantillonnage des données est contrôlé par un comportement dépendant entre autres de l'environnement et des capacités du robot qui ne permet pas d'obtenir beaucoup d'exemples. Par conséquent, nous souhaitons exprimer un compromis entre précision et vitesse de l'apprentissage.

## 2 Changement de représentation vers les Réseaux Bayésiens

L'approche que nous proposons consiste à changer de formalisme de représentation en transformant un graphe orienté et cyclique (i.e. HMM hiérarchique factorisé dont on fait abstraction du typage des dépendances) en un réseau bayésien. Le formalisme des réseaux bayésiens s'inscrit en effet dans un cadre théorique développé et bien connu, ce qui laisse espérer une résolution plus facile.

Toutefois, deux problèmes se posent lors d'un tel changement de représentation : (1) le coût de la prise en compte des dépendances multiples qui peuvent exister pour une variable (i.e. calculer  $P(A|B1, B2, \dots, Bn)$  soit  $2^n$  paramètres dans le cas de variables binaires) et (2) celui de la reformulation des éventuels circuits du graphe en vue de leur modélisation dans le cadre d'un réseau bayésien.

La solution que nous proposons repose sur un assouplissement des contraintes liées aux dépendances multiples lors du changement de représentation. En effet, nous proposons de décomposer les dépendances multiples en les prenant en compte deux à deux (i.e. en traitant séparément  $P(A|B1), P(A|B2), \dots, P(A|Bn)$ , soit  $2n$  paramètres, toujours dans le cas de variables binaires – et en introduisant par ailleurs certaines contraintes de mise à jour).

Soit  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ,  $n$  variables aléatoires discrètes, de modalités respectives  $m_1, \dots, m_n$ . On suppose connus les  $p_i = P(V_i)$  (vecteur de taille  $m_i$ ), pour tout  $i$ , ainsi que certains  $p_{i,j} = P(V_j|V_i)$ ,  $j \in I_i \subset \{1, \dots, n\}$  ( $p_{i,j}$  est une matrice de taille  $(m_i, m_j)$ ).

Ce système peut être représenté par un graphe, dans lequel les noeuds sont les variables aléatoires  $V_i$ , et les arcs  $a_{i,j}$  représentent les  $p_{i,j}$ . La structure induite par les probabilités conditionnelles n'est pas contrainte (il peut par exemple exister des circuits). Pour simplifier la notation, on introduit le terme de **Réseaux Bayésiens Aplats** (ou RBA) pour désigner les réseaux ainsi générés dans la suite de cet article. Il reste maintenant à déterminer comment exprimer ce système dans le formalisme des Réseaux Bayésiens.

Pour chaque couple de variables dépendantes  $(A, B)$ , une variable additionnelle de parents  $A$  et  $B$  est ajoutée. Ceci présente le double avantage de limiter la complexité de la prise en compte des dépendances multiples (au prix d'une approximation), et d'éviter les circuits puisque que seules les variables additionnelles ont des noeuds parents dans le nouveau formalisme. Une fois cette reformulation réalisée, il est alors trivial de réaliser l'inférence souhaitée.

Pour chaque variable  $V_i$  du graphe d'origine, nous associons une variable du réseau bayésien, de même modalité, que nous continuerons à noter  $V_i$ .

Pour chaque arc  $a_{i,j}$  nous associons une variable additionnelle booléenne dans le réseau bayésien, que nous noterons  $A_{i,j}$ . Les  $A_{i,j}$  ont exactement deux parents dans le réseau bayésien, qui sont  $V_i$  et  $V_j$  (i.e. une V-structure). Ces variables sont *artificiellement* observées dans le but d'induire une dépendance entre les variables  $V_i$  et  $V_j$  (valeur d'observation fixée à vrai).

Une fois les variables additionnelles ajoutées, il reste à calculer leurs probabilités conditionnelles pour terminer la transformation du réseau bayésien. C'est à dire calculer les  $P(A_{i,j}|V_i, V_j)$ . Nous utilisons un système axiomatique à satisfaire pour que

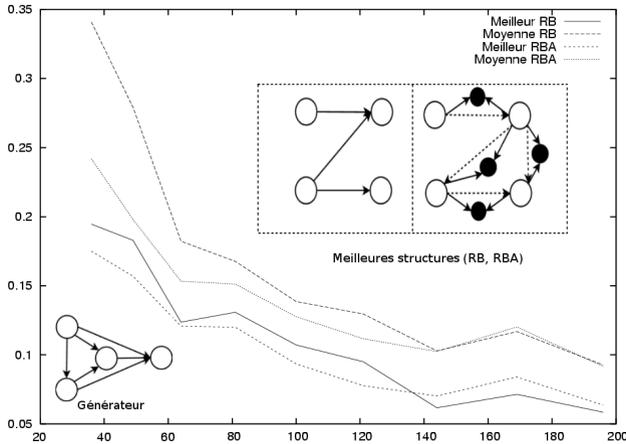


FIG. 1 – Cas de distribution défavorable - Apprentissage avec peu d'exemples.

les probabilités  $P(A_{i,j}|V_i, V_j)$  atteignent un point fixe (i.e. stable). Ce point fixe est atteint par itérations successives d'un algorithme inspiré de EM. La satisfaction de ce système axiomatique garantit un comportement cohérent du réseau au regard de la prise en compte des dépendances deux à deux par rapport à une prise en compte dans un réseau classique.

Les axiomes et le système d'équation induit par les axiomes sont donnés en détail dans l'article publié dans les actes de l'atelier EGC 2005 sur les Modèles Probabilistes.

### 3 Expérience d'apprentissage avec peu d'exemples

Nous avons choisi d'évaluer la capacité d'apprentissage des réseaux bayésiens aplatis en évaluant leur performance sur l'approximation d'une distribution générée par un réseau bayésien classique de taille 4. (cf. fig. 1). Ce générateur représente le pire des cas pour l'apprentissage par RBA car du fait de sa structure, la distribution jointe peut être quelconque.

Pour chaque réseau apprenant, l'erreur est définie comme la distance de Kullback-Leibler entre la distribution jointe de celui-ci et de celle du réseau générateur. Les résultats sont issus d'une étude exhaustive du comportement de l'ensemble des réseaux bayésiens classiques et aplatis sur les données issues du générateur (chaque réseau est évalué plusieurs fois pour bien approximer les résultats).

La figure 1 permet d'observer que les réseaux bayésiens aplatis apprennent mieux (à la fois en moyenne et pour le meilleur) que les réseaux bayésiens classiques lorsqu'il y a peu d'exemples. En revanche, les performances s'inversent avec un grand nombre d'exemples. Ces résultats illustrent notre compromis entre rapidité et précision d'apprentissage puisqu'ils montrent bien que les RBA apprennent mieux avec peu

d'exemples pour ensuite perdre progressivement cet avantage.

## 4 Conclusions

Dans le cadre de cet article, nous nous sommes intéressés à la transformation d'un graphe (en pratique un HMM hiérarchique et factorisé) en un réseau bayésien selon certaines contraintes afin de modéliser différemment les dépendances multiples et les circuits. Nous avons présenté un algorithme de changement de représentation permettant de construire ce que nous appelons des réseaux bayésiens aplatis ainsi que les axiomes garantissant une modélisation adéquate des dépendances multiples reformulées. Cette modélisation est basée sur un compromis entre précision et vitesse d'apprentissage qui repose sur la prise en compte des dépendances multiples en les exprimant deux à deux seulement.

Les résultats obtenus sont prometteurs puisqu'ils montrent que les réseaux bayésiens aplatis ont les propriétés suivantes :

- prise en compte et modélisation des circuits, ceux-ci étant fréquents dans les HMM considérés ;
- apprentissage plus rapide avec peu d'exemples, au prix, il est vrai, d'une perte de précision à long terme. En robotique, ce compromis est avantageux puisque l'on dispose souvent d'exemples peu nombreux et/ou biaisés.

Nous pouvons de plus remarquer que nous avons présenté ici des expériences comparant les performances de la représentation en RBA et en RB. Cependant, le formalisme final étant toujours celui des RB (avec des variables additionnelles et un calcul des paramètres satisfaisant des axiomes), nous pouvons très bien envisager des représentations "hybrides" dans lesquelles certaines dépendances (pour lesquelles peu de données sont disponibles) sont exprimées dans le cadre des RBA, tandis que d'autres sont exprimées de façon classique. Ainsi, cette méthode permettrait de tirer parti du compromis expressivité/apprentissage avec peu d'exemples des RBA tout en gardant une expressivité pouvant atteindre celle des RB lorsque le nombre d'exemples disponibles devient suffisant.

## Références

- Ghahramani Z. and Jordan M. I. (1996), Factorial Hidden Markov Models, Machine Learning, vol. 29. 1996, pages 245-273.
- Theocharous G. and Rohanimanesh K. and Mahadevan S. (2001), Learning Hierarchical Partially Observable Markov Decision Processes for robot navigation, Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation (ICRA-2001). IEEE Press.
- Theocharous G. and Murphy K. and Kaelbling L. (2004), Representing hierarchical POMDPs as DBNs for multi-scale robot localization, Proc. of the IEEE international Conference on Robotics and Automation (ICRA'04).