

# COUPLAGE DES ANALYSES DIMENSIONNELLE ET STATISTIQUE DANS LA MODELISATION DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE EMIS PAR RUPTURE DE PRODUITS SOLIDES FRAGILES

---

*Mariam MAHFOUZ, Mokrane ABDICHE\* et Karim ALLAF\**  
Institut Girard Desargues – UPRESA 5028  
Université Lyon 1 – Bât. 101  
43 bd. Du 11 novembre 1918  
69622 Villeurbanne cédex

\* Laboratoire Maîtrise des Techniques Agro-Industrielles. Pôle Sciences et Technologie. Université de La Rochelle  
Avenue Marillac. 17042 La Rochelle Cedex 01 (France).

---

## Résumé :

Afin de pallier le manque d'étude et d'analyses fondamentales concernant le rayonnement sonore émis lors de la rupture de produits solides fragiles, des études expérimentales ont été tout récemment réalisées par l'équipe de recherche du Laboratoire Maîtrise des Techniques Agro-Industrielles (L.M.T.A.I.) ; elles visaient la quantification des phénomènes physiques et l'établissement des lois empiriques liant les caractéristiques acoustiques, mécaniques et dimensionnelles du matériau sollicité. L'approche monovariationnelle a vite révélé ses limites propres et son inadéquation avec l'objectif visé. Disposant d'une large base de données expérimentales englobant de nombreux échantillons de matériaux divers et de dimensions géométriques variables, nous avons adopté une nouvelle approche fondée sur une analyse dimensionnelle permettant à la fois de réduire la complexité et de construire des modèles à l'aide de méthodes statistiques.

**Mots clés :** matériaux fragiles, élasticité linéaire, flexion, rupture, émission sonore, traitement du signal, approche dimensionnelle, indice d'applicabilité.

## I. Introduction

L'établissement de corrélation entre les émissions acoustiques dues à la rupture des produits solides fragiles et les caractéristiques propres de ces matériaux et des dimensions géométriques des échantillons sollicités, permettra une utilisation immédiate dans le domaine de matériaux et surtout dans celui de la mesure instrumentale de la texture des aliments solides. Là, le plaisir induit par le bruit sonore incite à

l'analyse de la texture autrement que par les méthodes sensorielles qui restent, encore de nos jours, le principal moyen de quantification du contenu textural.

K. ALLAF(1998) a approfondi les diverses analyses et établi de nouvelles méthodes de mesure instrumentale de la texture (VAN HECKE, 1994 et GOULLIEUX, 1995) Ses travaux ont démontré la possibilité de généralisation de corrélations entre la structure et les caractéristiques mécaniques d'une part, et les caractéristiques de l'onde sonore émise lors de la rupture de produits alimentaires solides fragiles, d'autre part (BONNEVILLE et al. 1993, 1995 ; ALCHAKRA et al. 1996a, 1996b).

De plus, dans le domaine du Génie des Matériaux, les travaux concernant le rayonnement sonore induit par la rupture des matériaux solides fragiles sont particulièrement limités. Les principaux travaux réalisés dans le secteur acoustique concernent principalement l'utilisation des ondes ultra-sonores pour la détection des micro ou macro-défauts et des micro-ruptures ou pour le suivi de la rupture au sein des matériaux solides (métaux, composites, etc...) (KAISER, 1950 ; BAE et al., 1979 ; CHEBBO et al., 1996, 1997). Les matériaux considérés ont, presque systématiquement, un certain comportement plastique ; rares sont les travaux concernant des matériaux à comportement parfaitement élastique jusqu'à la rupture.

Récemment, l'équipe de recherche du LMTAI a procédé à l'extension de ses travaux à des produits non alimentaires également solides fragiles, afin de mieux comprendre les processus élémentaires et disposer d'éléments fondamentaux liant le phénomène mécanique de rupture à l'onde acoustique engendrée. Quatre familles de produits solides comportant chacune plusieurs variétés ont été étudiées : 7 variétés de pâtes alimentaires, 27 de verre plat, 7 de graphite et 4 de polystyrène. Or, un produit est dit solide fragile lorsqu'il a un comportement linéairement élastique jusqu'à la rupture. Tous ces échantillons sont de type solide fragile à l'exception du polystyrène et de quelques échantillons à forte humidité de pâtes qui se caractérisent par une certaine plasticité avant la rupture.

La sollicitation mécanique adoptée est la flexion simple « trois points ». Elle permet d'aboutir à la caractérisation mécanique du matériau (module d'Young, contrainte à la rupture et énergie mécanique de rupture) Dans l'ensemble de ces travaux, une approche monovariationnelle a permis d'établir des corrélations de type puissance liant des paramètres acoustiques aux dimensions géométriques de l'échantillon et à l'énergie mécanique de rupture. Cependant, les produits étudiés ne présentent pas nécessairement une simple monovariation ; souvent, dans un même lot, les variations de deux paramètres indépendants tels que la « contrainte à la rupture » et le « module d'Young » par exemple interviennent d'une façon couplée lors du changement d'un paramètre géométrique ou de variété. Cette multivariation non contrôlable des paramètres a un impact direct sur les phénomènes acoustiques et impose des études multidimensionnelles complétant la méthode monovariationnelle initiale, afin de construire des lois empiriques sur ces données expérimentales

Dans cet article, nous tentons d'établir entre les paramètres acoustiques d'une part et les paramètres mécaniques et les dimensions géométriques d'autre part, des relations globales qui fassent intervenir totalité des variables. La généralisation des résultats empiriques nous a amenés à adopter une analyse dimensionnelle couplée à des méthodes statistiques de traitement des données.

Grâce aux "lois empiriques généralisées" ainsi obtenues, les mesures acoustiques permettront la caractérisation du matériau solide fragile ; ainsi, la qualité texturale pourrait encore être mieux quantifiée et plus facilement appréhendée dans les secteurs de l'industrie agro-alimentaire concernés.

## II. Matériels et mesures

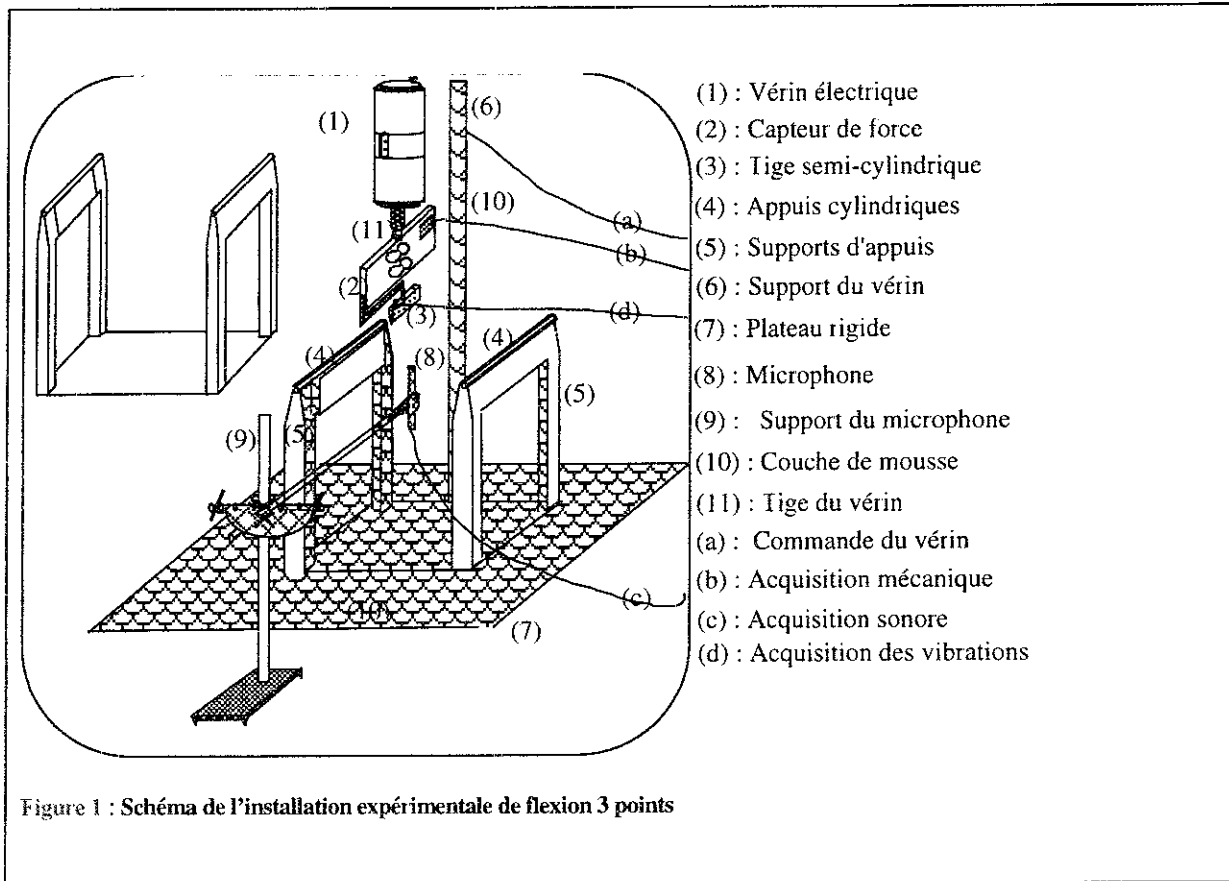
### II.1. Produits utilisés

Quatre différentes familles de produits sont utilisées : le verre, le graphite, la pâte alimentaire (spaghetti) et le polystyrène. Ainsi, la base de données est constituée de 369 échantillons de verre noté (v), 162 de pâtes alimentaires (p), 91 de graphite (grosses mines) (m), 51 de graphite (petites mines) (g) et 38 de polystyrène (polys). La base des données expérimentales s'élève ainsi à 711 échantillons. Quelques échantillons de pâtes sont humidifiés ; ils présentent ainsi un comportement plastique avant la rupture. Un comportement similaire est rencontré dans le cas du polystyrène. Ces deux catégories d'échantillons vont

ainsi nous permettre de bien établir les limites de validation des lois empiriques éventuelles concernant plus spécifiquement les matériaux solides fragiles.

## II.2. Mesures acoustiques et mécaniques

Les mesures acoustiques et mécaniques sont obtenues d'une façon simultanée grâce à un montage expérimental de flexion « trois points » (fig. 1).



L'échantillon à analyser est posé sur deux appuis cylindriques (4), fixés sur deux cadres (5) de 400 mm de hauteur. Une force mécanique lui est appliquée en son milieu par une tige semi-cylindrique (3) liée à un vérin électrique (1) à vitesse de descente contrôlée constante de  $0,625 \text{ mm.s}^{-1}$ . La distance entre les deux appuis est réglable afin de pouvoir modifier la longueur utile des échantillons. Entre l'embout du vérin (11) et la tige semi-cylindrique (3) est placé un capteur de force mécanique (2) à jauges de contraintes, de sensibilité  $6,77 \text{ N.V}^{-1}$ , de capacité maximale 70 N et de précision 0,01 N ; il permet de mesurer en fonction du temps, la force résistante de l'échantillon et son évolution lors de la flexion jusqu'à la rupture. Enfin, l'onde sonore engendrée par la rupture de l'échantillon est captée par un microphone omnidirectionnel capacitif de type 4133 et de sensibilité  $12 \text{ mV.Pa}^{-1}$  (8) placé à une distance fixe de 8 cm de la source sonore.

La forme globale des signaux acoustiques et mécaniques est reproductible. Les deux figures 2 et 3 en donnent une illustration générale :  $\Delta F$  étant la variation de force,  $\Delta \delta$  celle de déformation ou de la flèche.

Amplitude (V)

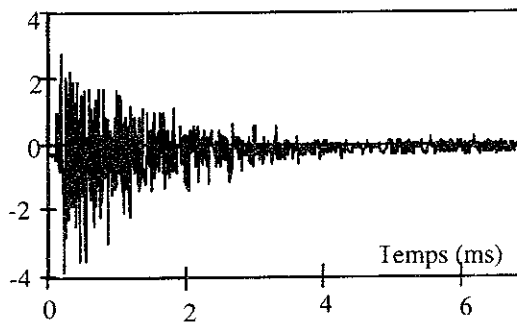


Figure 2 : Courbe typique de l'émission acoustique d'un matériau solide fragile linéairement élastique jusqu'à la rupture, par flexion trois points

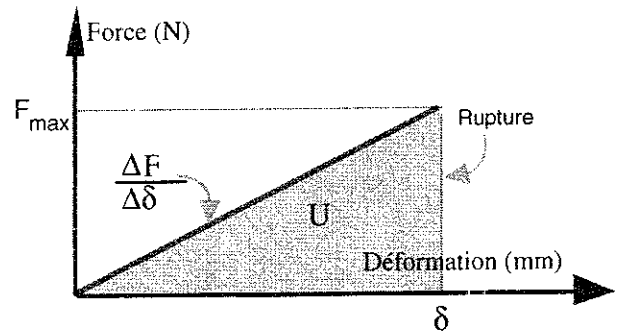


Figure 3 : Courbe typique de la sollicitation mécanique d'un matériau solide fragile linéairement élastique jusqu'à la rupture, par flexion trois points

### II.3. Traitements des signaux

Le signal sonore enregistré en Pa, traverse deux filtres numériques passe-haut et passe-bas de Butterworth d'ordre 20 chacun (HIRANO et al., 1979). La fréquence de coupure du premier filtre est de 100 Hz consiste à supprimer la quasi-totalité du bruit de fond rencontré dans la chambre de mesures. Le second filtre, à fréquence de coupure 20 kHz, sert à limiter les mesures au domaine audible [20 Hz, 20 kHz]. Deux caractéristiques sont déterminées : la pression maximale A et la pression efficace K donnée

$$\text{par l'expression : } K = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p^2(i)}$$

ou p est le signal sonore filtré et N le nombre de points du signal.

Les produits de nature solide fragile ont un comportement élastique linéaire jusqu'à la rupture. Par contre, le polystyrène et les échantillons à forte humidité de pâtes présentent une certaine plasticité. Le traitement des signaux mécaniques consiste, dans une première étape, à déterminer la force maximale  $F_{\max}$  (à la rupture), la flèche maximale  $\delta_{\max}$  correspondante et la pente  $P = \Delta F / \Delta \delta$  de la courbe obtenue par régression entre 0 et  $\delta_{\max}$ . Dans le cas des produits solides fragiles caractérisés par un comportement parfaitement élastique jusqu'à la rupture, la régression est linéaire et la pente est donnée par :  $P = F_{\max} / \delta_{\max}$ . La vitesse v de sollicitation étant constante, la flèche est déterminée à partir de la mesure de l'évolution de la déformation au cours du temps :  $\delta = v t$ .

## III. Analyse dimensionnelle

### III.1. Principe général

« L'analyse dimensionnelle est une méthode permettant de déduire des renseignements concernant un phénomène à partir de la simple hypothèse que le phénomène puisse être décrit par une équation correcte au niveau dimensionnel reliant les diverses variables. La grande généralité de la méthode lui confère à la fois de la puissance et de la faiblesse... » (LANG HEAR).

L'analyse dimensionnelle a pour objectif le regroupement des variables physiquement indépendantes, suivant les critères d'homogénéité de dimension dans les relations et lois recherchées. Elle conduit à réduire les critères proposés et à proposer une généralisation des lois empiriques obtenues, qu'il s'agit ensuite de valider sur une nouvelle série d'expériences.

Le choix de paramètres adimensionnels, calculés à l'aide des grandeurs mesurées, permet la définition d'une nouvelle base de données; le nombre des paramètres explicatifs diminue éliminant ainsi quelques problèmes qui risquent de perturber le traitement statistique ultérieur et surtout le problème de la multicollinéarité. Ces paramètres adimensionnels seront au paragraphe suivant.

**III.2. Méthode**

L'objectif est d'exprimer chacun des paramètres acoustiques suivants : la pression acoustique maximale A et la pression acoustique efficace K, en fonction des paramètres géométriques et mécaniques

La première étape consiste à choisir les paramètres concernés par l'étude et de ne retenir que les variables indépendantes du point de vue physique

Parmi l'ensemble des paramètres géométriques et physiques, le choix s'est porté sur la longueur L, la section S, le moment d'inertie I et la masse volumique R. Ce choix a l'avantage de permettre de traiter ensemble les données relatives aux produits de sections circulaire (de diamètre D) ou rectangulaire (de longueur b et d'épaisseur h).

Parmi les paramètres mécaniques, nous avons opté pour la force maximale F et la pente P ; ces deux paramètres regroupés ultérieurement avec les paramètres géométriques de base permettent d'exprimer les caractéristiques propres du matériau à savoir le module d'Young E et la contrainte à la rupture C, ainsi que la flèche maximale δ et l'énergie mécanique de rupture U. L'ensemble est donné par le tableau suivant :

	Expressions générales	Forme parallélépipédique	Forme cylindrique
Module d'Young :	$E = P \frac{L^3}{48 I}$	$E = P \frac{L^3}{4 b h^3}$	$E = P \frac{4L^3}{3 \pi D^4}$
Contrainte à la rupture :	$C = \frac{F.L.h}{8 I}$	$C = \frac{3}{2} \frac{F.L}{b h^2}$	$C = \frac{8.F.L}{\pi D^3}$
Energie mécanique :	$U = \frac{2}{3} \frac{I.L}{h^2} \frac{C^2}{E}$	$U = \frac{1}{18} \frac{C^2}{E} L b h$	$U = \frac{1}{24} \frac{C^2}{E} L \frac{\pi D^2}{4}$
Moment d'inertie :		$I = \frac{1}{12} b h^3$	$I = \frac{\pi}{64} D^4$
Section :		$S = b h$	$S = \frac{\pi}{4} D^2$

Tableau 1 : Expressions des caractéristiques mécaniques et géométriques.

La base des dimensions retenue est L pour la longueur, M pour la masse et T pour le temps. Les nombres adimensionnels π sont issus de la combinaison des divers paramètres explicatifs et de l'un des paramètres à expliquer suivant les relations :

pour A :  $\pi = f(A, L, S, I, R, F, P) = \beta A^a L^l S^s I^i R^r F^f P^p$

et pour K :  $\pi = g(K, L, S, I, R, F, P) = \beta' K^a L^l S^s I^i R^r F^f P^p$

Où a, l, s, i, r, f et p (respectivement a', l', s', i', r', f' et p') sont les puissances, β et β' pourront être fixés arbitrairement. La dimension de π peut s'exprimer respectivement par :

$$[\pi] = (ML^{-1}T^{-2})^a L^l L^{2s} L^{4i} (ML^{-3})^r (MLT^{-2})^f (MT^{-2})^p \quad \text{et} \quad (II)$$

$$[\pi] = (ML^{-1}T^{-2})^a L^l L^{2s} L^{4i} (ML^{-3})^r (MLT^{-2})^f (MT^{-2})^p .$$

Cherchant à obtenir un paramètre π adimensionnel, on aboutit aux 2 systèmes de 3 équations indépendantes suivants, respectifs à A et K :

$$\left. \begin{array}{l} a+r+f+p=0 \\ -a+l+2s+4i-3r+f=0 \\ -2a-2f-2p=0 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} a'+r'+f'+p'=0 \\ -a'+l'+2s'+4i'-3r'+f'=0 \\ -2a'-2f'-2p'=0 \end{array} \right\} \quad (III)$$

D'après le théorème π de Buckingham (KREITH F. 1967), le nombre des variables indépendantes est ainsi réduit du nombre d'équations indépendantes ; quatre paramètres adimensionnels π indépendants sont extraits de la résolution de chaque système d'équations

Dans cette résolution, les deux cas considérés sont similaires du fait de l'équivalence dimensionnelle de A et de K. Une première constatation à portée physique importante concerne l'identification de r et r' : ils sont nuls (1<sup>er</sup> et 3<sup>ème</sup> équations de chacun des systèmes précédents) ; A et K apparaissent ainsi indépendants vis à vis à la masse volumique R.

Les 4 paramètres adimensionnels retenus, pour A (1<sup>er</sup> ligne du tableau) et K (2<sup>ème</sup> ligne), sont :

$\pi_{1A} = \frac{AL^2}{F}$	$\pi_2 = \frac{F}{PL}$	$\pi_3 = \frac{I}{S^2}$	$\pi_4 = \frac{S}{L^2}$
$\pi_{1K} = \frac{KL^2}{F}$	$\pi_2 = \frac{F}{PL}$	$\pi_3 = \frac{I}{S^2}$	$\pi_4 = \frac{S}{L^2}$

Tableau 2 : Expressions des paramètres adimensionnels retenus

Remarquons à présent que nous disposons de deux paramètres à expliquer π<sub>1A</sub> et π<sub>1K</sub> et de trois paramètres explicatifs π<sub>2</sub>, π<sub>3</sub> et π<sub>4</sub>.

#### IV. Modélisation statistique

L'ensemble des données issues des résultats expérimentaux est ainsi réduit à un tableau de cinq colonnes et 711 lignes dont on proposera les relations empiriques généralisées.

A la lumière des premiers résultats obtenus suite à la variation monoparamétrique, nous cherchons des relations de type puissance. Le modèle considéré pour chacun des deux cas A et K est du type suivant

$$\pi_1 = \alpha \cdot \pi_2^b \pi_3^c \pi_4^d \quad (IV)$$

La transformation logarithmique des données permet d'avoir un modèle linéaire :

$$\ln \pi_1 = \ln \alpha + b \cdot \ln \pi_2 + c \cdot \ln \pi_3 + d \cdot \ln \pi_4 \quad (V)$$

Elle permet également aux variables expliquées de s'approcher de la normalité, condition nécessaire pour l'utilisation de tests d'hypothèses, d'intervalles de confiances, etc...

Vu la diversité des familles de produits utilisés, nous estimons qu'un modèle unique ne pourra être adéquat pour tous ces produits. Pour cela, et afin de bien déceler les classes homogènes d'observations, nous avons recours à une méthode d'analyses factorielles : **l'analyse en composantes principales (ACP)**, qui fournit une description graphique des données à partir des projections sans perdre beaucoup d'information.

Les ACP ainsi que la détermination des coefficients du modèle (V) par la régression linéaire multiple (méthode des moindres carrés ordinaires) sont réalisées avec le logiciel **Statgraphics plus sous windows 95 (version 3.0)**.

Notations : Verre : v, Pâtes sèches : p\_s, Pâtes humides : p\_h, Mines (grosses) : m, Polystyrène : polys et Graphites : g. Et  $\ln \pi$  sera noté, dans les sorties du logiciel, Inpi.

#### IV.1. Analyses en composantes principales

##### Première ACP :

Les variables actives sont les variables explicatives : Inpi2, Inpi3, et Inpi4. Les variables supplémentaires sont les variables à expliquer : Inpia et Inpik. Le nombre d'observations (individus) est 711, et les variables sont standardisées.

##### Résultats :

La matrice des corrélations des variables actives :

	Inpi2	Inpi3	Inpi4
Inpi2	1,000	-0,138	0,368
Inpi3	-0,138	1,000	-0,469
Inpi4	0,368	-0,469	1,000

valeurs propres	valeurs propres cumulées	pourcentage de variance	pourcentage cumulé
1,667	1,667	55,575	55,575
0,866	2,534	28,880	84,455
0,466	3,000	15,545	100,000

vecteurs propres en colonnes

	U1	U2	U3
Inpi2	0.484	0.794	0.368
Inpi3	-0.568	0.605	-0.558
Inpi4	0.666	-0.061	-0.744

Dans les résultats ci-dessus, figurent les variances respectives des trois composantes principales ; ce sont les valeurs propres de la matrice de corrélations des variables actives introduites. On trouve aussi les pourcentages et les pourcentages cumulés de la variance totale. Les pourcentages cumulés donnent des indications sur le pouvoir descriptif de l'espace vectoriel (à 2 ou 3 dimensions) sur lequel sera projeté le nuage des points. Ainsi ce potentiel descriptif du premier plan principal (axes 1 et 2) est de 84,455 %. On voit bien que le premier axe représente Inpi3 et Inpi4 et moins Inpi2, alors que le second axe représente Inpi2 et Inpi3 (en examinant les deux premiers vecteurs propres).

La figure 4 montre le nuage des points projeté dans le premier plan principale. On trouve les échantillons des pâtes humidifiées (p\_h) isolées à gauche et celles du polystyrène (polys) à droite. Ces groupes d'observations correspondent bien aux produits qui présentent un comportement plastique avant la rupture. Même au sein du même produit « les pâtes », on remarque la différence entre les échantillons humidifiées (p\_h) et les autres (p\_s). Quant aux graphites, l'isolement paraît moins évident.

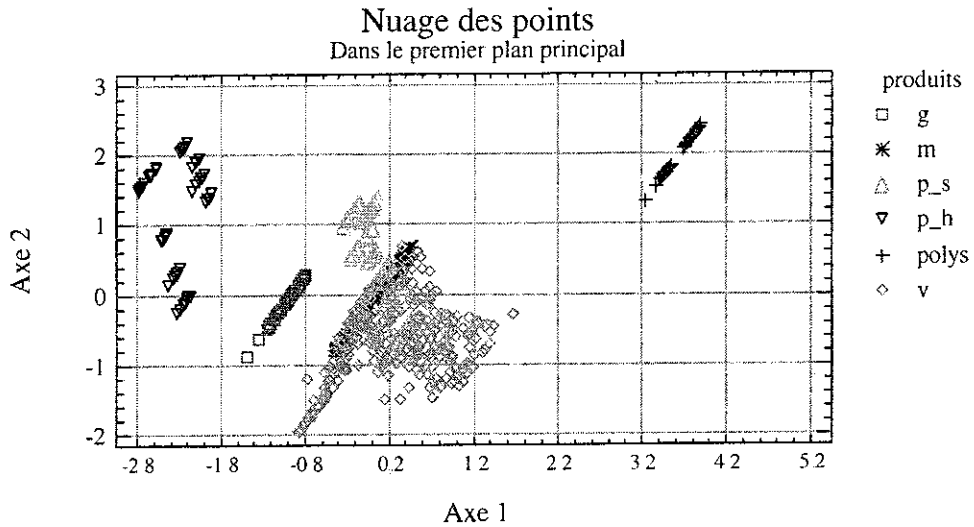


Figure 4 : Nuage des points correspondant à tous les produits, dans le premier plan principal

En projetant toutes les variables, actives et supplémentaires, dans le premier plan principal, on remarque d'une part que les trois variables actives sont bien représentées, ce qui n'est pas le cas pour les autres (figure 5). Les carrés des cosinus des angles que forment les variables supplémentaires avec le premier plan principal sont faibles : 0,387 pour  $lnpi_3$  et 0,288 pour  $lnpi_4$ . Ce qui explique que les variables supplémentaires ne sont pas proches du plan principal ; ainsi l'idée de la présence d'une relation linéaire entre les deux groupes de variables est écartée, pour tous les produits.

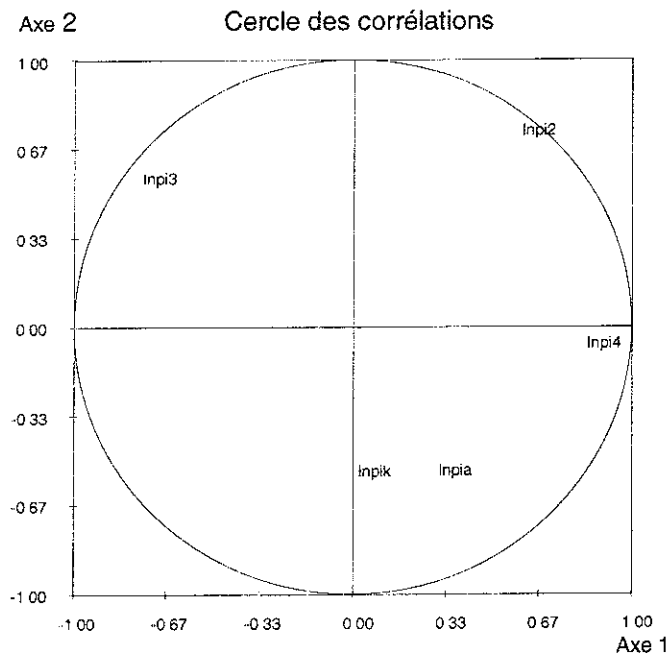


Figure 5 : La projection des variables actives et supplémentaires dans le premier plan principal (tous les produits)

La nature légèrement plastique du polystyrène et de quelques échantillons humides de pâtes les différencie considérablement du reste des matériaux fragiles dont le comportement est, par définition, linéairement élastique jusqu'à la rupture. Cette première analyse montre que l'énergie emmagasinée lors



de la sollicitation et utilisable par la suite dans la génération du rayonnement acoustique n'est pas similaire dans les deux situations.

Les résultats du traitement statistique confirment donc ces prévisions physiques. Il a donc été normal d'écartier les 38 échantillons du polystyrène et les 92 des pâtes à forte humidité des données servant à la modélisation statistique.

Il reste à prendre une décision concernant les graphites, moins isolés dans la figure 4.

Pour avoir une première constatation, nous avons fait deux ACP : A/ et B/, en prenant comme précédemment  $lnpi2$ ,  $lnpi3$  et  $lnpi4$  comme variables actives, et  $lnpia$  et  $lnpik$  comme variables supplémentaires ; les individus sont, pour A/ : verres, pâtes sèches et mines et pour B/ : Verres, pâtes sèche, mines et graphites. La figure 6 montre bien que les variables  $lnpia$  et  $lnpik$  sont bien représentées dans l'analyse A/, alors que ce n'est pas le cas dans l'analyse B/. Les carrées des cosinus des angles que forment ces variables supplémentaires avec le premier plan principal, dont le pouvoir descriptif est de 78,8 % pour A/ et de 79,7 % pour B/, sont :

dans le cas A/ : 0,780 pour  $lnpia$  et 0,757 pour  $lnpik$

dans le cas B/ : 0,346 pour  $lnpia$  et 0,278 pour  $lnpik$ .

Ainsi nous pouvons dire que la relation entre les deux groupes de variables est quasi – linéaire dans la population formée par les verres, les pâtes sèches et les mines ; alors qu'elle n'est pas évidente en ajoutant les échantillons des graphites.

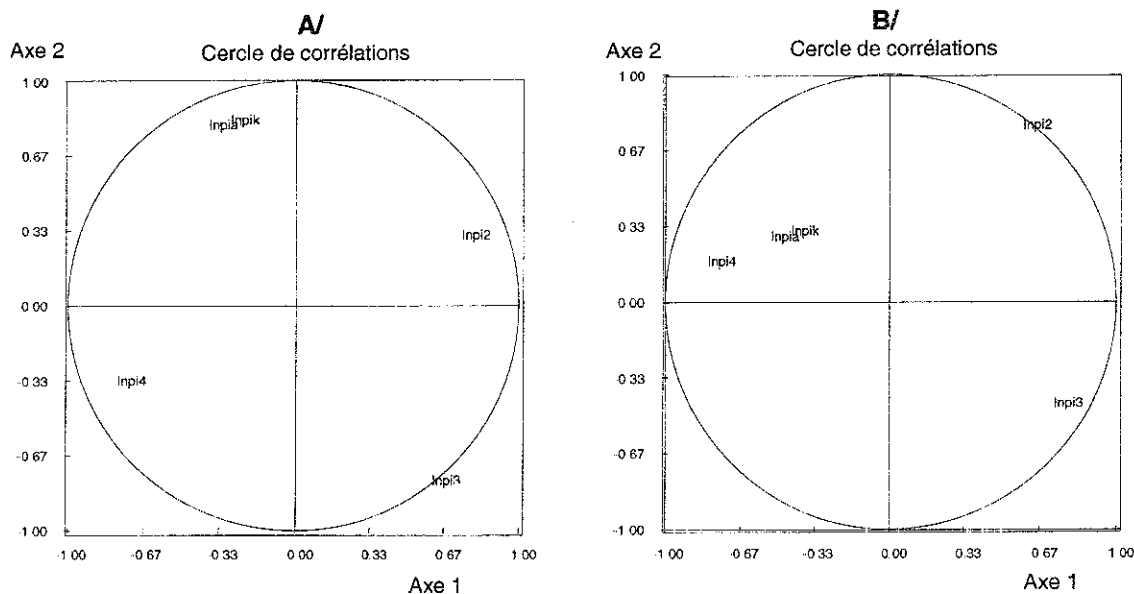


Figure 6 : projections des variables actives et supplémentaires Les individus sont pour A/ : verres, pâtes sèches et mines et pour B/ : Verres, pâtes sèches, mines et graphites

## IV.2. La régression linéaire multiple

### Résultats dans (v-pâtes sèches-m-g)

Par projection on perd toujours des informations. Pour cela, la constatation faite à la fin du paragraphe précédent nous paraît insuffisante pour décider d'écartier le graphite de la modélisation.

Les modèles obtenus à partir des résultats expérimentaux dans la population issue des échantillons des mines, graphites, verre et pâtes sèches (581 observations) sont assez satisfaisants ( $R^2$ , égal à 86,9 % pour  $\text{Ln}\pi_A$  et 84,6 % pour  $\text{Ln}\pi_K$ ).

Cependant, les résultats expérimentaux concernant les mines et graphites comportent un écart - type nettement plus important que l'ensemble des produits étudiés. Ce qui traduit, d'une certaine façon, l'importance de la présence aléatoire des plans de cisaillement dont l'impact, au plan de la sollicitation, est visible aux travers des nombreux accidents de « petites chutes localisées » de force.

Les figures 7 et 8, représentant respectivement les valeurs prévues de  $\text{Ln}\pi_A$  et  $\text{Ln}\pi_K$  en fonction des valeurs expérimentales (observées), montrent une certaine persistance de surévaluation des valeurs des graphites, nettement plus importante que celle des mines. Est ainsi révélée au niveau statistique, la distinction physique entre ce type de matériau (le graphite) et le reste des échantillons.

Il a donc été normal d'écarter le graphite (51 observations) de l'ensemble des données à modéliser. Il s'agit des observations les plus isolées dans les figures 7 et 8.

Valeurs estimées en fonction des valeurs observées de  $\text{Ln}\pi_A$   
(verres \_ pâtes sèches \_ mines \_ graphites)

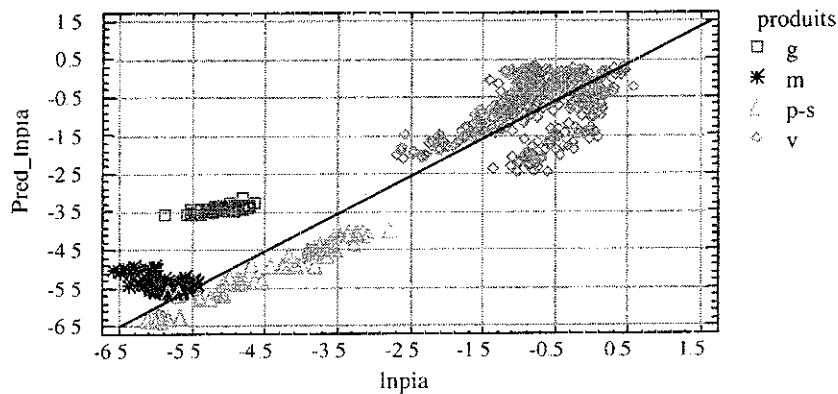


Figure 7 : Valeurs prédites par le modèle ajusté, pour les produits : verres, pâtes sèches, mines et graphites en fonction des valeurs expérimentales de  $\text{Ln}\pi_A$

Valeurs estimées en fonction des valeurs observées de  $\text{Ln}\pi_K$   
(verres \_ pâtes sèches \_ mines \_ graphites)

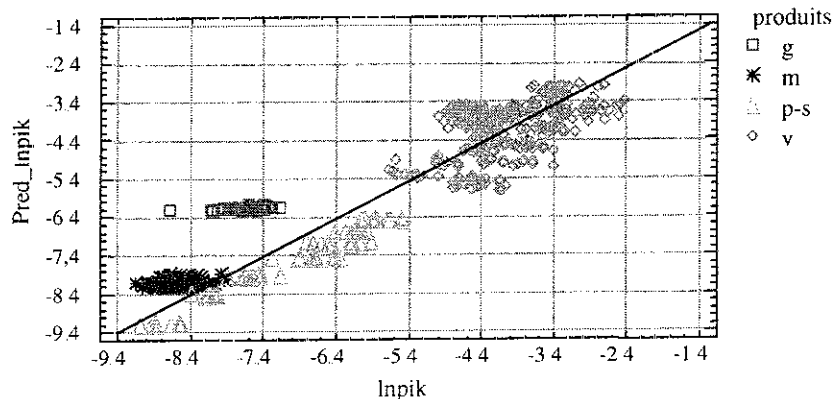


Figure 8 : Valeurs prédites par le modèle ajusté, pour les produits : verres, pâtes sèches, mines et graphites en fonction des valeurs expérimentales de  $\text{Ln}\pi_K$ .

**Choix final des données**

La base des données retenues pour la réalisation de l'étude est ainsi formée, de 369 échantillons de verre, 70 échantillons de pâtes sèches et 91 échantillons de mines ; soit au total 530 échantillons, appartenant toutes à la famille des produits linéairement élastiques jusqu'à la rupture.

Le deux modèles obtenus sont :

$$\text{Ln } \pi_A = -28,0 - 1,265 \cdot \text{Ln } \pi_2 - 1,594 \cdot \text{Ln } \pi_3 - 1,858 \cdot \text{Ln } \pi_4, \tag{VI}$$

qui explique 93,74 % des variations totales.

$$\text{Ln } \pi_K = -28,565 - 0,803 \cdot \text{Ln } \pi_2 - 1,380 \cdot \text{Ln } \pi_3 - 1,813 \cdot \text{Ln } \pi_4, \tag{VII}$$

qui explique 91,14% des variations totales.

Ci-après figurent les détails de l'analyse concernant la variable  $\text{Ln } \pi_A$ .

Multiple Regression Analysis

-----  
Dependent variable: lnpiA  
-----

Parameter	Estimate	Standard Error	T Statistic	P-Value
CONSTANT	-28,0079	0,484663	-57,7885	0,0000
lnpi2	-1,26472	0,0704742	-17,9458	0,0000
lnpi3	-1,59437	0,0197955	-80,542	0,0000
lnpi4	-1,85833	0,0437346	-42,4912	0,0000

-----  
Analysis of Variance  
-----

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	2361,9	3	787,301	2627,18	0,0000
Residual	157,629	526	0,299675		
Total (Corr.)	2519,53	529			

R-squared = 93,7437 percent

R-squared (adjusted for d f ) = 93,708 percent

Tableau 3 : Une sortie du logiciel Statgraphics contenant les paramètres estimés et la tables de l'analyse de la variance, l'analyse étant dans la population : verres - pâtes sèches - mines

Dans le tableau 3, on trouve les coefficients estimés du modèle, ainsi que leurs écart- types et la statistique T de Student avec la probabilité d'être dépassée en valeur absolue pour chacun de ces coefficients ( p \_ value) Cette probabilité est inférieure à 0,01 ce qui prouve que tous ces paramètres sont statistiquement significatifs (on rejette l'hypothèse de nullité du paramètre) avec un niveau de confiance de 99 %. Puis on trouve la table de l'analyse de la variance qui partage les variations totales de la variable expliquée en deux parties : une partie expliquée par le modèle et une partie qui correspond aux résidus. Le calcul statistique F de Fisher permet de tester la validité du modèle en global. Ce test indique bien que le modèle est adéquat avec un niveau de confiance égal à 99 %. On trouve aussi le coefficient de détermination du modèle (93,7437 %) qui indique le pourcentage des variations de la variable dépendante, expliquées par le modèle, ainsi que le coefficient de détermination ajusté qui tient compte des degrés de liberté (93,708 %).

95.0% confidence intervals for coefficient estimates  
(verres - pâtes sèches - mines)

Parameter	Estimate	Standard Error	Lower Limit	Upper Limit
CONSTANT	-28,0079	0,484663	-28,96	-27,0558
lnpi2	-1,26472	0,0704742	-1,40316	-1,12627
lnpi3	-1,59437	0,0197955	-1,63325	-1,55548
lnpi4	-1,85833	0,0437346	-1,94425	-1,77242

Tableau 4 : Une sortie contenant les intervalles de confiance, à 95 %, des coefficients estimés du modèle

Le tableau 4 donne l'intervalle de confiance de chaque paramètre estimé avec un niveau de confiance égale 95 %.

Correlation matrix for coefficient estimates  
(verres - pâtes sèches - mines)

	CONSTANT	lnpi2	lnpi3	lnpi4
CONSTANT	1,0000	0,6336	0,2271	0,9199
lnpi2	0,6336	1,0000	-0,1663	0,3276
lnpi3	0,2271	-0,1663	1,0000	0,1620
lnpi4	0,9199	0,3276	0,1620	1,0000

Tableau 5 : Une sortie contenant la matrice des corrélations des coefficients estimés

Le tableau 5 montre les corrélations entre les coefficients estimés du modèle ajusté, pour détecter la présence de sérieuse multicollinéarité, c'est-à-dire des corrélations entre les variables explicatives. Or ce n'est pas notre cas car ces corrélations sont, toutes, en valeur absolue plus petites que 0,35 (en dehors de la corrélation avec la constante du modèle). Ce qui montre bien l'intérêt de combiner l'analyse dimensionnelle avec l'analyse statistique : absence de multicollinéarité et par suite stabilité des coefficients estimés.

La figure 9 montre bien que les estimations sont réparties autour de la première bissectrice avec des écarts relativement petits. Ce qui appuie l'hypothèse de la pertinence du modèle.

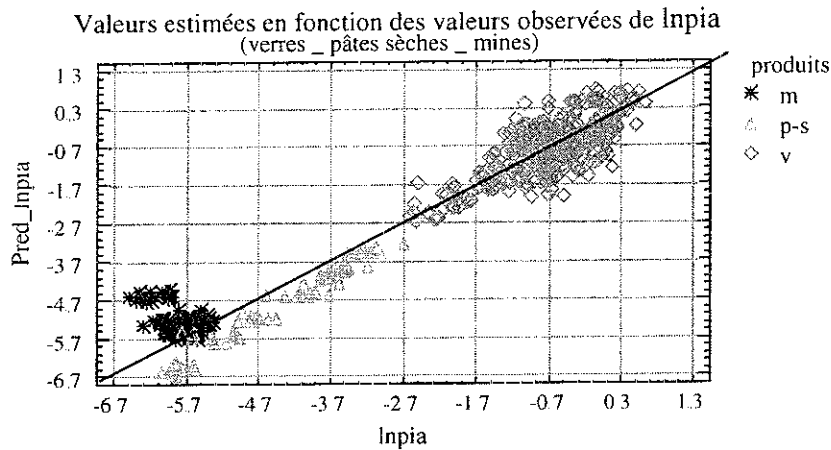


Figure 9 : Valeurs prédites par le modèle ajusté, dans la population formée par les verres, les pâtes sèches et les mines, en fonction des valeurs expérimentales de Inpia

L'analyse concernant la variable  $\ln \pi_k$  est similaire avec un modèle adéquat . Dans la figure 10 on trouve le graphe des valeurs prédites en fonction des valeurs expérimentales .

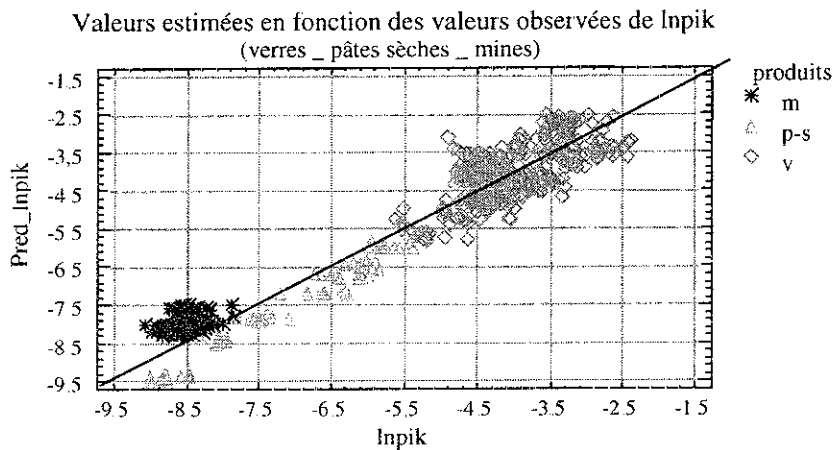


Figure 10 : Valeurs prédites par le modèle ajusté, dans la population formée par les verres, les pâtes sèches et les mines, en fonction des valeurs expérimentales de Inpik

### IV.3. Indice d'applicabilité de deux modèles

Pour pouvoir quantifier le degré de validité de chacun de deux modèles trouvés à une population formée d'un ou de plusieurs produits, nous introduisons la notion d'« indice d'applicabilité » .

#### Définition

L'indice d'applicabilité d'un modèle M, ajusté dans une population selon la méthode des moindres carrés, à une autre population W est défini comme étant:

$$I(W) = \text{sce}/\text{sce}(M)$$

Ou :

sce est la somme des carrées des résidus obtenue en faisant l'ajustement dans W.

et  $sce(M)$  est la somme des carrés des résidus obtenue en appliquant le modèle M à W.

L'indice  $I(W)$  est compris entre zéro et un ; pour une valeur égale à 1, l'applicabilité est parfaite.

Le tableau 6 contient l'indice d'applicabilité de deux modèles précédents, VI correspondant à A et VII correspondant à K, obtenus en faisant l'ajustement dans la population : verre, pâtes sèches et mines, à plusieurs autres populations :

		Populations						
		v+ ps + m	v	v + ps	V+ps+m+g	ps + ph	Ph+polys+g	Ph+polys
Modèles	VI (A)	1	0,669	0,738	0,683	0,0037	0,0016	0,0008
	VII (K)	1	0,537	0,758	0,726	0,0066	0,0023	0,0019

↓

Population où on a trouvé les modèles

Tableau 6 : Indice d'applicabilité des modèles VI et VII à plusieurs populations

Etant supérieures à 0.5, pour les produits solides fragiles linéairement élastiques jusqu'à la rupture, les valeurs de cet indice mettent en évidence la validité de ces deux modèles pour ces produits. Alors, ces valeurs sont proches de zéro quand un produit présentant une certaine plasticité, entre en jeu.

## V. Retour aux paramètres initiaux

Le retour aux paramètres adimensionnels initiaux permet de transformer les expressions VI et VII en :

$$\pi_A = e^{-28} \pi_2^{-1.265} \pi_3^{-1.594} \pi_4^{-1.858} \tag{VIII}$$

$$\pi_K = e^{-28.565} \pi_2^{-0.803} \pi_3^{-1.380} \pi_4^{-1.813} \tag{IX}$$

### Expression empirique de la pression acoustique maximale A

L'expression de la pression acoustique maximale A en fonction de la distance entre les deux appuis de l'échantillon L, la pente P, la section S, le moment d'inertie I et la force maximale F, est obtenue en remplaçant les paramètres adimensionnels  $\pi$  par leurs expressions respectives (tableau 2):

$$A = 6,9 \cdot 10^{-13} L^{2.981} I^{-1.594} S^{1.33} P^{1.265} F^{-0.265} \tag{X}$$

Exprimée en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau (tableau 1, colonne 1), le module d'Young E et la contrainte à la rupture C, A devient :

$$A = 5,325 \cdot 10^{-11} L^{-0.549} I^{-0.594} h^{0.265} S^{1.33} C^{-0.265} E^{1.265} \tag{XI}$$

L'intervention de la flèche maximale  $\delta$  permet de réduire l'expression sous la forme suivante :

$$A = 3,3 \cdot 10^{-11} L^{-0.019} I^{-0.594} S^{1.33} \delta^{-0.265} E \tag{XII}$$

Les échantillons de section parallélépipédique auront alors pour expression :

$$A = 1,45 \cdot 10^{-10} L^{-0.019} b^{0.736} h^{-0.452} \delta^{-0.265} E \tag{XIII}$$

Ceux de section circulaire :

$$A = 1,44 \cdot 10^{-10} L^{-0,019} D^{0,284} \delta^{-0,265} E \quad (\text{XIV})$$

**Expression empirique de la pression acoustique moyenne K**

L'expression de la pression acoustique moyenne K en fonction de L, P, S, I et F, est :

$$K = 3,9 \cdot 10^{-13} L^{2,249} I^{-1,380} S^{0,947} P^{0,803} F^{0,197} \quad (\text{XV})$$

En fonction du module d'Young E et de la contrainte à la rupture C, K devient :

$$K = 1,315 \cdot 10^{-11} L^{-0,357} I^{-0,380} h^{-0,197} S^{0,947} C^{0,197} E^{0,803} \quad (\text{XVI})$$

Là aussi, l'intervention de la flèche maximale  $\delta$  permet de réduire l'expression :

$$K = 1,872 \cdot 10^{-11} L^{-0,571} I^{-0,380} S^{0,947} \delta^{0,197} E \quad (\text{XVII})$$

Les échantillons de section parallélépipédique auront alors pour expression :

$$K = 4,813 \cdot 10^{-11} L^{-0,571} b^{0,567} h^{-0,193} \delta^{0,197} E \quad (\text{XVIII})$$

Ceux de section circulaire :

$$K = 4,681 \cdot 10^{-11} L^{-0,571} D^{0,374} \delta^{0,197} E \quad (\text{XIX})$$

**Expressions simplifiées des pressions acoustiques maximale A et moyenne K**

Une simplification des expressions XIII et XIV de A pourrait permettre d'écrire :

$$A = 1,45 \cdot 10^{-10} \left(\frac{b}{h}\right)^{0,74} \left(\frac{h}{\delta}\right)^{0,275} E \quad (\text{XX})$$

dans le cas des échantillons de section parallélépipédique, et

$$A = 1,44 \cdot 10^{-10} \left(\frac{D}{\delta}\right)^{0,275} E \quad (\text{XXI})$$

dans le cas des échantillons de section circulaire.

Une simplification équivalente des expressions XVIII et XIX de K permettrait d'écrire :

$$K = 4,8 \cdot 10^{-11} \left(\frac{b}{L}\right)^{0,57} \left(\frac{\delta}{h}\right)^{0,2} E \quad (\text{XXII})$$

dans le cas des échantillons de section parallélépipédique, et

$$K = 4,7 \cdot 10^{-11} \left(\frac{D}{L}\right)^{0,57} \left(\frac{\delta}{D}\right)^{0,2} E \quad (\text{XXIII})$$

dans le cas des échantillons de section circulaire.

## VI. Tableau de synthèse

Dans le tableau 7 figurent, pour chaque produit, les valeurs de la moyenne  $\bar{A}$  et de la moyenne des valeurs estimées  $\bar{\bar{A}}$  de A par la formule (X), celles de la moyenne  $\bar{K}$  et de la moyenne des valeurs estimées  $\bar{\bar{K}}$  de K par la formule (XV) et le nombre n des individus, ainsi que la propriété du produit jusqu'à la rupture et la nature de la prévision (Bonne / Mauvaise) :

Produit	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$	$\bar{K}$	$\bar{\bar{K}}$	n	Propriétés du produit jusqu'à la rupture	Nature de la prévision
Verre	39,41	35,975	1,389	1,602	369	Parfaitement élastique	Bonne
Pâte sèche	0,528	0,331	0,036	0,034	70	Parfaitement élastique	Bonne
Mine	0,4313	0,6311	0,0255	0,0651	91	Elastique	Bonne
Graphite	0,849	14,2359	0,0702	1,298	51	Moyennement plastique avec présence des micro-fissures	Mauvaise
Pâte humide	1,2674	0,0002	0,2386	7,6788	92	plastique	Mauvaise
Polystyrène	226,2897	0,5646	1,422	0,0883	38	Très plastique	Mauvaise

Tableau 7 : Tableau de synthèse

## VII. Conclusion

Le couplage des méthodes statistiques aux analyses dimensionnelles a été utilisé dans la caractérisation empirique de l'émission sonore qui accompagne systématiquement la rupture des produits solides fragiles.

Cette étude a été réalisée en vue d'établir des lois de type empirique liant ce phénomène aux caractéristiques physiques, mécaniques et géométriques de ces produits qui sont caractérisés par un comportement linéairement élastique jusqu'à la rupture. L'absence de toute théorie fondamentale dans ce domaine donne une importance particulière à cet outil empirique; il a été d'une grande utilité dans toutes les applications faisant appel à ce domaine de l'étude acoustique des matériaux.

Les nombreux résultats expérimentaux obtenus lors de la flexion simple d'éprouvettes de formes et de nature différentes ont été analysés en vue de déterminer les relations dans le cas des pressions acoustiques maximale A et moyenne K. L'adoption de la méthode d'analyse dimensionnelle de Buckingham a permis, au travers des nombres adimensionnels  $\pi$  de réduire le nombre de paramètres et de mieux gérer les résultats expérimentaux



Du point de vue statistique, cette méthode dimensionnelle permet de réduire le nombre des variables explicatives (nous avons passé de 6 à 3 variables explicatives), d'éliminer ainsi toute redondance dans les données, et par conséquent de résoudre le problème de la multicollinéarité, ce qui permet de stabiliser les coefficients estimés des modèles proposés tout en optimisant la précision de l'estimation.

Ainsi, il apparaît clairement l'importance du couplage des analyses dimensionnelle et statistique pour la recherche de lois empiriques.

Dans le cas des émissions sonores ainsi étudiées, la seule analyse dimensionnelle montre l'indépendance des pressions acoustiques vis à vis de la masse volumique des matériaux solides fragiles utilisés.

L'ensemble de l'étude montre une grande distinction entre les produits à comportement élasto-plastique et ceux à comportement purement élastique. Une certaine différence est également obtenue dans le cas de produits à plans de cisaillement aléatoires (graphite).

Pour les produits purement fragiles, les expressions des pressions acoustiques représentent d'une façon très satisfaisante l'ensemble des résultats expérimentaux. Elles montrent la grande importance du module d'élasticité en tant que principal facteur mécanique intervenant dans le cas présent. La contrainte à la rupture intervient également, mais à un niveau plus réduit ; son implication pourrait être mieux traduite au travers de la flèche maximale subie par l'éprouvette lors de la rupture.

L'ensemble des résultats devra, par la suite, être utilisé dans les deux domaines de quantification par voie acoustique de la croustillance des produits biscuitiers et extrudés, et de caractérisation proprement dite de quelques types spécifiques de produits non alimentaires solides fragiles. Au sein de notre équipe de recherche, nous comptons par la suite analyser et valider les modèles obtenus avec d'autres produits parfaitement élastiques ; il serait probablement intéressant d'établir un degré de corrélation entre l'écart des mesures réelles par rapport au modèle et la part de plasticité dans le comportement propre des matériaux.

---

## Bibliographie :

- 1) AL CHAKRA W. & al. (1996) : « Etude de l'effet de la teneur en eau sur des produits solides fragiles par analyse du rayonnement acoustique ». *Sciences des aliments*, 16 (1996a), 555 – 571.
- 2) AL CHAKRA W. & al. (1996) : « Characterisation of Brittle Food Products : application of acoustical emission method ». *Journal of Texture Studies*, 27/3 (1996b) 327 – 348.
- 3) ALLAF K. & al. (1998) : Etude du rayonnement acoustique émis lors de la rupture des matériaux solides fragiles : Approche par analyse dimensionnelle et modélisation statistique de l'impact des caractéristiques mécaniques et des dimensions géométriques ». *Sous presse*.
- 4) BAE P. & al. (1979) : « Characterisation and classification method for acoustic emission signal ». *The American Society for Nondestructive Testing*.
- 5) BONNEVILLE R. & al. (1993) : « Analyse acoustique du rayonnement sonore lors de la rupture de produits agro-alimentaires solides fragiles ». *Récents progrès en Génie des Procédés*, 7, 287 – 292.
- 6) BONNEVILLE R. & al. (1995) : « Développement d'un capteur acoustique pour la mesure instrumentale de la texture des produits alimentaires : Quels liens avec l'analyse sensorielle ? ». *Récents progrès en Génie des Procédés*, 9, 1 – 6.
- 7) CHEBBO N. & al. (1996) : « Numerical Modeling of Ultrasonic Beam Interaction with the flaw of type plan ». *Acoustica, Acta Acoustica*, 82 (suppl. 1), 241.

- 8) CHEBBO N. & al (1997) : « Modélisation de l'interaction d'une onde plane avec un défaut volumique dans un milieu élastique ». *Journal de la Société Française d'Acoustique*, 1201 – 1204.
  - 9) GOULLIEUX A. & al. (1995) : « Mesure de la texture de biscuits ; application à la pénétrométrie conique ». *Sci Aliments*, 15 , 3 – 18.
  - 10) GUTTMAN I. (1982) : « Linear Models : An introduction ». John Wiley & Sons.
  - 11) HIRANO K. & al. (1979) : « Explicit design formulae for digital tan filters with low-pass, high-pass, band-pass and band-stop characteristics ». *Journal of The Franklin Institute*, 307/5, 263 – 290
  - 12) KAISER P (1950) : « Technische Hochschule ». Thesis, Münxhen, Germany.
  - 13) KREITH F. (1967) : « Transmission de la chaleur et Thermodynamique ». Masson et Cie Editeurs.
  - 14) RAYMOND H. MYERS (1990) : « Classical and modern regression with applications ». PWS-KENT Publishing Compagny.
  - 15) SAPORTA G. (1990) : « Probabilités, Analyse des données et Statistique ». Edition Technip.
  - 16) VAN HECKE E. & al. (1995) : « Texture and structure of crispy-puffed food products : Mechanical properties in bending ». *Journal of Texture Studies*, 26 , 11 – 25.
-