

MODELISATION PAR CHAINES DE MARKOV HOMOGENES ERGODIQUES DES APPELS DE PUISSANCE D'UN PARC DE CHAUFFE-EAU ELECTRIQUES

Matthieu Orphelin

*Centre d'Energétique
Ecole des Mines de Paris
60, boulevard Saint-Michel
F-75272 Paris Cedex 06
orphelin@cenerg.ensmp.fr*

Tél. : 33 (0)1 40.51.90.80

Fax : 33 (0)1.46.34.24.91

Résumé : *lors de l'évaluation des actions de Maîtrise de la Demande d'Electricité, on a besoin de méthodes estimant au mieux les gains potentiels d'une mesure en termes de consommation et puissance évitées, d'où l'intérêt de disposer de courbes de charge foisonnées sur un parc d'appareils électriques.*

Ces approches conjuguent connaissance des systèmes physiques et connaissance des mécanismes d'agrégation. Une nouvelle méthode stochastique est développée dans cet article, basée sur une modélisation markovienne des appels de puissance d'un parc de chauffe-eau électriques. Le caractère ergodique de la chaîne de Markov qui régit l'agrégation des réponses sur le parc est démontrée.

Mots-clés : *Processus stochastique, Chaîne de Markov, Ergodicité*

1. Contexte général de l'étude

1.1. Notion de courbe de charge électrique

L'électricité représente 35 % de l'utilisation mondiale d'énergie ; sa production engendre 30 % des émissions anthropiques de carbone. A Kyoto, en 1997, les pays industrialisés se sont engagés sur une réduction de 5.2 % des émissions de gaz à effet de serre à l'horizon 2012 et ont placé les actions de Maîtrise de la Demande d'Electricité (MDE) parmi les mesures les plus prometteuses pour atteindre ces objectifs.

La demande d'électricité sur un parc de clients subit des variations temporelles importantes (mensuelles, hebdomadaires, horaires, ...). Les moyens de production suivent ces fluctuations : les compagnies électriques disposent de combinaisons de centrales de base (coûts d'investissement élevés), semi-base et pointe (forts coûts variables). Les coûts de production d'un kWh dépendent donc fortement du moment où il est demandé ; il en est de même pour la pollution engendrée. Pour évaluer les gains d'une action de MDE, il faut donc disposer de méthodes donnant, à chaque instant, les appels de puissance d'un parc d'appareils. On parle alors de reconstitution de courbes de charge électriques.

Les chauffe-eau électriques représentent en moyenne 15 % de la consommation électrique du secteur résidentiel et peuvent contribuer jusqu'à 30 % aux appels de pointes du réseau, car les besoins en eau chaude sanitaire coïncident avec les périodes de forte demande électrique. Le stockage possible de l'eau chaude permet cependant d'envisager des stratégies intéressantes de contrôle-commande pour décaler les appels de puissance. C'est pourquoi cet usage est particulièrement étudié par les compagnies électriques.

Les besoins en eau chaude, et donc le fonctionnement des chauffe-eau, varient fortement d'un foyer à l'autre. Parmi les sources de dispersion, citons le nombre d'occupants, le niveau de vie, les horaires, les habitudes, les appareils terminaux (baignoire ou douche par exemple). Si la modélisation d'un système physique unitaire est aujourd'hui bien maîtrisée, il reste à proposer des méthodes statistiques ou stochastiques permettant l'étude d'un parc.

1.2. Agrégation des réponses sur un parc

Un chauffe-eau électrique est, comme de nombreux appareils utilisant l'électricité, régi par un thermostat fonctionnant en tout-ou-rien. Le thermostat est caractérisé par une bande-morte, de valeurs haute et basse T_{HAUTE} et T_{BASSE} , entre lesquelles, dans le cas le plus simple (pas de

puisage, maintien du ballon en température pour compenser les pertes avec l'extérieur) la température évolue. Après un puisage d'eau, la température sort de la bande morte et l'appel de puissance (résistance électrique constante) permet de reconstituer le contenu énergétique du chauffe-eau. Chaque appareil appelle donc puissance constante, ce qui engendre une courbe de charge individuelle en forme de créneau. Nous allons voir que la courbe de charge agrégée sur un groupe d'appareils a une allure bien différente.

Les figures 1 et 2 représentent les appels de puissance des chauffe-eau électriques de deux usagers le même jour. Les courbes de charge unitaires ont une forme similaire, mais dépendent des sources de diversité précédemment cités : les appels de puissance sont non-concomitants d'un foyer à l'autre. Si l'on agrège la courbe de charge sur quatre clients (figure 3), on obtient le profil que verrait un poste de distribution desservant ces quatre usagers. La pointe foisonnée (ou agrégée) n'est plus que de 950 W et l'on observe des niveaux de puissance intermédiaires. On voit apparaître deux groupements d'appels de puissance (matin et soir) correspondant aux périodes où les puisages sont les plus fréquents.

Si l'on agrège les courbes de charge de 168 appareils (figure 4), on obtient une courbe de charge beaucoup plus lissée. C'est la courbe de charge agrégée unitaire représentative du parc de chauffe-eau électriques. La pointe unitaire agrégée n'est plus alors que de 520 W. Aucun usager n'a une courbe de charge ayant la forme de la courbe de charge agrégée. Cependant elle donne des informations précieuses. D'une part, en moyenne, chaque nouveau client ajoute cette charge au système ; d'autre part, elle représente le maximum de probabilité de la charge d'un foyer. En d'autres termes, c'est la courbe de charge d'un usager marginal (voir [WIL96] pour plus de détails).

On peut définir un facteur de foisonnement donnant le pourcentage de modèles allumés à chaque instant t par :

$$F_{\text{FOISONNEMENT}}(t) = \frac{P_{\text{AGREGÉE POPULATION}}(t)}{\sum P_{\text{UNITAIRES}}} = \frac{P_{\text{AGREGÉE UNITAIRE}}(t)}{P_{\text{UNITAIRE}}} \quad (1)$$

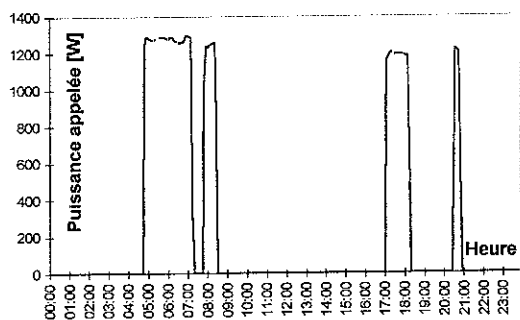


Fig. 1. Client A

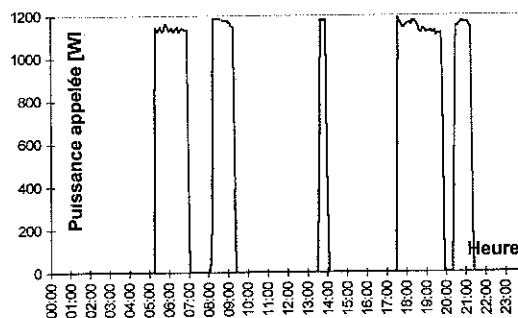


Fig. 2. Client B

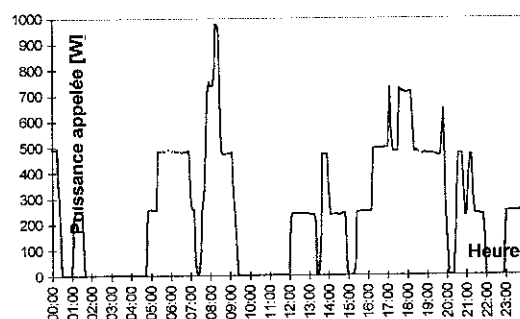


Fig. 3. 4 clients

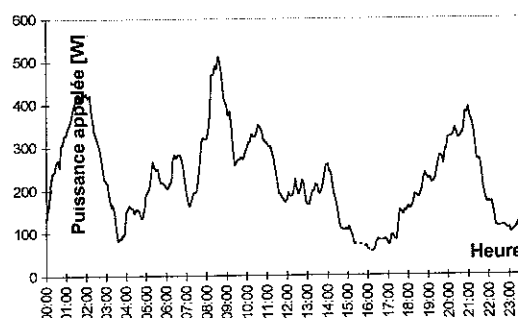


Fig. 4. 168 clients

La connaissance parfaite de la réponse agrégée sur un parc n'est envisageable que par une caractérisation de tous les systèmes le composant. Cela nécessiterait de simuler le comportement de chacun des foyers, ce qui donnerait, en pratique, des temps de calcul prohibitifs mais surtout signifierait que l'on puisse avoir accès à l'ensemble des paramètres influant sur la demande de chaque appareil (y compris des paramètres non-observables), ce qui est illusoire. Les phénomènes d'agrégation doivent donc être étudiés et modélisés à l'aide de méthodes statistiques ou stochastiques.

2. Modèles d'agrégation existants

2.1. Mise en équations déterministe d'un système unitaire

Les méthodes d'agrégation rencontrées dans la littérature sont toutes basées sur la même modélisation physique des chauffe-eau ; il est donc utile de la présenter ici. La représentation retenue est dite 'à une température' ou encore 'stock parfaitement brassé' et s'écrit :

$$Mc_P \frac{dT}{dt} = -K(T - T_A) - c_P q (T_{\text{SOUTIRAGE}} - T_F) + P(t)m(t)c(t) \quad (2)$$

où :

M	masse d'eau contenue dans l'appareil	[kg]
c_P	capacité calorifique de l'eau	[J/(kg.°C)]
K	coefficient d'échange global	[W/°C]
P	puissance de l'élément chauffant	[W]
q	débit d'eau soutiré	[kg/s]
m	variable binaire traduisant l'état du thermostat (1 pour ON, 0 pour OFF)	
c	variable binaire traduisant l'état du contrôle-commande externe (1 pour ON, 0 pour OFF)	
T	température moyenne de l'eau dans le ballon	[°C]
T_A	température ambiante	[°C]
$T_{\text{SOUTIRAGE}}$	température de référence du soutirage	[°C]
T_F	température de l'eau froide	[°C]

On introduit la constante thermique du ballon τ (définie comme le rapport entre la masse thermique et la conductance, [s]), le paramètre T_P (défini le rapport entre le coefficient de pertes et la puissance électrique, [°C]) et le paramètre T_{PUISAGE} (qui traduit la perte de température due au puisage, [°C]) :

$$\tau = \frac{Mc_P}{K} \quad T_P = \frac{P}{K} \quad T_{\text{PUISAGE}} = -\frac{c_P \cdot q \cdot (T_{\text{SOUTIRAGE}} - T_F)}{K} \quad (3)$$

L'équation (2) devient :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau}(I - I_E + m(t)I_P - I_{\text{PUISAGE}}) \quad (4)$$

L'équation discontinue sur la variable discrète qu'est l'état du thermostat peut s'écrire sous une forme discrétisée :

$$\text{si } I(t) > I_{\text{HAUTE}} \quad \text{alors} \quad m(t+\Delta t) = 0 \quad (5a)$$

$$\text{sinon si } I(t) < I_{\text{BASSE}} \quad \text{alors} \quad m(t+\Delta t) = 1 \quad (5b)$$

$$\text{sinon} \quad m(t+\Delta t) = m(t) \quad (5c)$$

2.2. Méthodes de la littérature

Deux approches statistiques considèrent que la source principale de diversité d'un foyer à l'autre est l'instant de puisage, décrit comme une variable aléatoire normale dans [LAN96] ou quelconque pour [VAN96]. Ces deux modèles permettent d'avoir une expression de la puissance agrégée sur le parc à chaque instant en fonction des fonctions de répartition des lois de probabilités utilisées. Nous avons proposé dans [ORPa99] une application de ces méthodes pour la reconstitution des courbes de charge des parcs français et italiens de chauffe-eau électriques.

Les méthodes à dominante stochastique prennent en compte les sources de diversité en ajoutant un terme aléatoire de bruit au membre de droite de l'équation déterministe (4). Ainsi, Dolan et Nehrir ([DOL93]) utilisent une simulation de Monte-Carlo stochastique pour reconstituer les appels de puissance agrégés. [MAL83] introduit lui aussi un terme de bruit (une méthode d'identification est proposée dans [KAM92]), faisant ainsi apparaître un système à état stochastique hybride. Il introduit les fonctions de distribution de quatre populations (ON avec puisage / ON sans puisage / OFF avec puisage / OFF sans puisage) sur

les différents niveaux de température et montre que le système de départ est équivalent à celui formé par quatre équations aux dérivées partielles sur les fonctions de distribution.

[MAL90] propose par ailleurs la définition d'une chaîne de Markov régissant les phénomènes d'agrégation, démontre son ergodicité et donne l'expression analytique de la solution stationnaire. Ce modèle donne les expressions analytiques des fonctions de densité ergodiques des répartitions des températures, sous certaines conditions particulièrement contraignantes : le terme de pertes vers l'ambiance est indépendant de la température du ballon et la puissance installée est supposée toujours supérieure au taux de puisage instantané, ce qui permet de maintenir la température dans la bande-morte du thermostat. Ces hypothèses, vérifiées pour les chauffe-eau américains (fortes puissances unitaires installées), ne sont pas valables dans le contexte européen.

3. Proposition d'un nouveau modèle stochastique

3.1. Approche stochastique des problèmes dynamiques macroscopiques

Reformulons notre approche : nous cherchons à étudier le comportement d'ensemble d'un parc de chauffe-eau électriques. Les caractéristiques et les sollicitations varient d'un système à l'autre. Il s'agit donc de passer de l'étude des systèmes dits 'individuels' à celle des systèmes 'collectifs', c'est-à-dire composés d'un très grand nombre de systèmes 'individuels'.

Comme énoncé dans [BRO88] ou [FAR64], le concept d'approche stochastique est adapté à ce type de problèmes ; il permet d'éliminer des informations superflues. Suivant cette démarche, nous avons montré dans [ORPb99] dans quelle mesure la forme de la perturbation stochastique introduite dans l'équation déterministe (4) (ou dans son schéma de résolution) traduisait la connaissance que l'on a de la dispersion du parc. Elle peut être définie a priori (renseignements statistiques sur une partie de la population), identifiée (par le traitement des résultats de campagnes de mesure), exprimée analytiquement (loi normale ou autre) ou numériquement.

Ainsi, la perte du caractère purement déterministe vient du fait que l'on renonce à la détermination précise des caractéristiques et des conditions initiales de chaque système élémentaire étudié pour ne s'intéresser qu'à l'ensemble. La réalité des équations physiques est

en partie traduite en termes aléatoires, car variant d'un système à l'autre. Le comportement stochastique ainsi engendré est tel que le système semble évoluer sous l'influence d'une force aléatoire même si, en fait, le mouvement est gouverné par des équations dynamiques purement déterministes (voir [CAS90]).

3.2. Espace des états d'un chauffe-eau électrique

Le système considéré étant l'eau contenue dans le ballon, les interactions avec l'extérieur sont parfaitement caractérisées par :

- la description des pertes avec l'ambiance (proportionnelles à l'écart de température) et des puisages de l'utilisateur ;
- le fonctionnement du thermostat et de la résistance (ici : tout ou rien, puissance constante).

Nous choisissons donc de caractériser un état du chauffe-eau par la température moyenne de l'eau et la caractéristique ON ou OFF du thermostat. L'ensemble des états, appelé espace et noté E^* , sera donc composé de la famille des états ON, notée E_1^* et de la famille des états OFF, notée E_0^* .

On passe de l'espace des états $E^* = \left\{ \begin{matrix} E_1^* \\ E_0^* \end{matrix} \right\}$ de dimension infinie à l'espace dénombrable des états discrétisés $E = \left\{ \begin{matrix} E_1 \\ E_0 \end{matrix} \right\}$ de dimension finie par discrétisation du champ de température entre deux bornes T_{MINI} et T_{MAXI} , avec un pas de température ΔT [°C]. L'état {I et ON (respectivement OFF)} décrit les systèmes aux thermostats allumés (respectivement éteints) pour lesquels la température est comprise dans l'intervalle $[T - \Delta T/2 ; T + \Delta T/2[$.

On introduit les entiers L_{BASSE} , L_{HAUTE} et L_{MAXI} qui repèrent les niveaux de températures des bornes de la bande-morte du thermostat (T_{BASSE} et T_{HAUTE}) et de la température maximale T_{MAXI} dans E . L'espace dénombrable des états E est alors de dimension $(L_{\text{MAXI}} + L_{\text{MAXI}})$, en raison de la composante ON/OFF de l'état (tableau 1). On introduit la suite $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$ à valeurs

dans $E = \left\{ \begin{matrix} E_1 \\ E_0 \end{matrix} \right\}$ qui représente les fonctions densité des températures des populations ON

(pour f_1) et OFF (pour f_0). La $n^{\text{ième}}$ occurrence de f est notée $f_n = \begin{bmatrix} f_{1,n} \\ f_{0,n} \end{bmatrix}$ et les valeurs de f_n

sont ordonnées dans l'ordre représenté tableau 1.

Ligne de f	Température moyenne T	Thermostat	Famille d'état
1	$T_{\text{MINI}} + \Delta T$	ON	E_1
L_{BASSE}	$T_{\text{BASSE}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{BASSE}}$	ON	E_1
L_{HAUTE}	$T_{\text{HAUTE}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{HAUTE}}$	ON	E_1
L_{MAXI}	$T_{\text{MAXI}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{MAXI}}$	ON	E_1
$L_{\text{MAXI}} + 1$	$T_{\text{MINI}} + \Delta T$	OFF	E_0
$L_{\text{MAXI}} + L_{\text{BASSE}}$	$T_{\text{BASSE}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{BASSE}}$	OFF	E_0
$L_{\text{MAXI}} + L_{\text{HAUTE}}$	$T_{\text{HAUTE}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{HAUTE}}$	OFF	E_0
$L_{\text{MAXI}} + L_{\text{MAXI}}$	$T_{\text{MAXI}} = T_{\text{MINI}} + \Delta T * L_{\text{MAXI}}$	OFF	E_0

Tab. 1. Composition de l'espace des états E et du vecteur f

Par définition, on a :

$$\sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}} f_{1,n}(i) = \% \text{ de modèles ON à l'instant } n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}} f_{0,n}(i) = \% \text{ de modèles OFF à l'instant } n \quad (7)$$

$$\sum f_{1,n} + \sum f_{0,n} = 1 \quad (8)$$

Le facteur de foisonnement est donné à chaque instant par :

$$F_{\text{FOISONNEMENT}}(n\Delta t) = \frac{P_{\text{AGREGEE POPULATION}}(n\Delta t)}{\sum P_{\text{UNITAIRES}}} = \frac{P_{\text{AGREGEE UNITAIRE}}(n\Delta t)}{P_{\text{UNITAIRE}}} = \sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}} f_{1,n}(i) \quad (9)$$

3.3. Introduction d'une chaîne de Markov homogène

On considère d'abord le cas d'un parc de chauffe-eau sans puisage. Comme exposé précédemment, le modèle retenu pour le chauffe-eau électrique est l'équation différentielle déterministe (4). On la discrétisée en temps avec un pas Δt [s]. La solution analytique de l'équation stochastique associée, pour l'intervalle de temps $[n.\Delta t, (n+1).\Delta t]$, s'écrit :

$$I[(n+1).\Delta t] = a \cdot I(n.\Delta t) + (1-a) \cdot [I_E + m(n.\Delta t) \cdot I_P] + V(n.\Delta t) \quad (10)$$

où :

$$a = \exp(-\Delta t/\tau), \quad (11)$$

et V est un bruit gaussien (ou autre) à moyenne nulle (ou non) qui traduit l'influence de la diversité des paramètres comme précédemment exposé. On écrit l'équation (10), pour un système isolé de la population ON à l'instant $n.\Delta t$, sous les notations simplifiées évidentes suivantes :

$$I_{n+1} = a \cdot I_n + (1-a) \cdot (I_E + T_P) + v_n \quad (12)$$

où v_n est un tirage de V .

et, pour un système isolé de la population OFF :

$$I_{n+1} = a \cdot I_n + (1-a) \cdot (I_E) + v_n \quad (13)$$

D'après les équations (12) et (13), l'existence de la chaîne de Markov est claire. De plus, sur les intervalles de temps étudiés (quelques heures ou moins), la température de la pièce et celle de l'eau froide peuvent être considérées constantes, la chaîne de Markov à créer est alors homogène :

$$\text{prob}\{f_{n+1} = j | f_n = i\} = q_{ij} \quad (14)$$

On introduit la matrice de transition associée à la chaîne de Markov, notée $Q = \{q_{ij}, i, j \in E\}$, dont les termes doivent vérifier :

$$q_{ij} \geq 0 \quad (i, j \in E) \quad (15a)$$

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = 1 \quad (i \in E) \quad (15b)$$

La règle des causes totales (Bayes) donne :

$$f_{n+1} = f_n \cdot Q \quad (16)$$

et, si l'on introduit la distribution initiale de la chaîne f_0 , on peut écrire :

$$f_n = f_0 \cdot Q^n \quad (17)$$

3.4. Construction de la matrice de transition associée

Soit un système à la température T_j et au thermostat allumé à l'instant n :

$$T_j = T_{\text{MINI}} + j \cdot \Delta T \quad (18)$$

Le système passe à la température T_{j+1} à l'instant $(n + 1)$ pour la valeur de bruit $v_{n,j+1}$ donnée par :

$$T_{n+1} = T_{j+1} = T_j + \Delta T = a \cdot T_n + (1 - a) \cdot (T_E + T_P) + v_{n,j+1} \quad (19)$$

Soit pour :

$$v_{n,j+1} = (1 - a) \cdot (T_j - T_E + T_P) + \Delta T \quad (20)$$

Il est alors judicieux d'introduire le terme 'moteur' A_{1j} :

$$A_{1j} = (1 - a) \cdot (T_j - T_E + T_P) \quad (21)$$

On peut généraliser et calculer les probabilités de passage de l'état j à tous les autres états ON. Si le bruit v_n est régi par une loi normale, on peut utiliser la loi cumulée de la loi normale (notée normcdf) pour écrire les termes de la matrice de transition pour la population ON :

$$\forall i \in [1; L_{MAXI}], \forall j \in [1; L_{MAXI} + L_{MAXI}]:$$

$$Q(i, j) = \text{normcdf}\left(A_{1j} + \frac{\Delta T}{2}\right) - (j - i) \cdot \Delta T - \text{normcdf}\left(A_{1j} - \frac{\Delta T}{2}\right) - (j - i) \cdot \Delta T \quad (22)$$

De la même façon, pour la population OFF, on introduit le terme 'moteur' A_{0j} :

$$A_{0j} = (1 - a) \cdot (T_j - T_E) \quad (23)$$

et on écrit les termes de la matrice pour la population OFF :

$$\forall i \in [L_{MAXI} + 1; L_{MAXI} + L_{MAXI}], \forall j \in [L_{MAXI} + 1; L_{MAXI} + L_{MAXI}]:$$

$$Q(i, j) = \text{normcdf}\left(A_{0j} + \frac{\Delta T}{2}\right) - (j - i) \cdot \Delta T - \text{normcdf}\left(A_{0j} - \frac{\Delta T}{2}\right) - (j - i) \cdot \Delta T \quad (24)$$

Notons que l'on pourrait prendre en compte une autre forme de répartition pour le bruit (par exemple : uniforme sur un intervalle fini), analytique ou pas.

La fonction cumulée étant une fonction croissante, la condition décrite par l'équation (15a) est vérifiée. Il reste à s'assurer de la condition (15b) qui traduit en fait, pour notre problème, la conservation de l'énergie. Numériquement, il faut choisir des niveaux de température T_{MINI} et T_{MAXI} suffisamment éloignés pour n'être pas atteints. On peut néanmoins écrire, par souci de précision :

$$\forall j \in [1; L_{MAXI} + L_{MAXI}]:$$

$$Q(1, j) = \text{normcdf}\left(A_j + \frac{\Delta T}{2}\right) - (j - 1) \cdot \Delta T - \text{normcdf}(-\infty) \quad (25)$$

$$Q(L_{\text{MAXI}}, j) = \text{normcdf}(+\infty) - \text{normcdf}\left(A_j - \frac{\Delta T}{2} - (j-i) \cdot \Delta T\right) \quad (26)$$

où $A_j = A_{1,j}$ ou $A_{0,j}$ selon la ligne étudiée. Par sommation, on a alors :

$$\sum_{j \in E} q_{ij} = \text{normcdf}(+\infty) - \text{normcdf}(-\infty) = 1 \quad (i \in E) \quad (27)$$

La condition (15b) est donc bien respectée, la conservation de l'énergie est assurée.

La matrice Q , telle que construite actuellement, modélise les changements de niveaux de température, mais pas les changements d'état du thermostat (passage de ON à OFF ou de OFF à ON). L'expression stochastique discrète qui régit le fonctionnement du thermostat est donnée par l'équation (5). On traduit cette dernière en modifiant les termes de la matrice Q , en considérant des conditions aux limites absorbantes, d'une manière similaire à celle proposée par [MAL83].

La condition (5a), soit (($m = \text{ON}$ et $T > T_{\text{HAUTE}}$) impossible), s'écrit :

$$\forall j \in [L_{\text{HAUTE}} + 1; L_{\text{MAXI}}]:$$

$$Q(i, j + L_{\text{MAXI}}) = Q(i, j + L_{\text{MAXI}}) + Q(i, j)$$

$$Q(i, j) = 0 \quad (28)$$

La condition (5b), soit (($m = \text{OFF}$ et $T < T_{\text{BASSE}}$) impossible), s'écrit :

$$\forall j \in [L_{\text{MAXI}} + 1; L_{\text{MAXI}} + L_{\text{BASSE}} - 1]:$$

$$Q(i, j - L_{\text{MAXI}}) = Q(i, j - L_{\text{MAXI}}) + Q(i, j)$$

$$Q(i, j) = 0 \quad (29)$$

Notons que les équations (28) et (29) ne modifient pas les conditions (15a) et (15b) nécessaires et suffisantes pour définir une matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

3.5. Prise en compte des puisages

Les besoins en eau chaude sanitaire varient au cours de la journée. On peut toutefois se ramener à des intervalles de temps sur lesquels l'hypothèse de stationnarité des puisages peut être justifiée (moins d'une heure). L'homogénéité de la chaîne de Markov est alors à nouveau vérifiée.

Nous illustrons ici la prise en compte des puisages dans notre approche sur un modèle de puisage instantané simple. Si α est la probabilité de puisage à l'instant t et si DI est la baisse de température du ballon inhérente à ce puisage, alors $(1-\alpha)$ systèmes restent à l'état calculé précédemment, α systèmes voient une baisse de leur température de DI . La matrice de transition de la chaîne de Markov « sans puisage » est modifiée en conséquence, par multiplication par une matrice R de même dimension que Q , dont les termes non nuls s'écrivent :

$\forall i,$

$$R(i,i) = (1 - \alpha) \quad (30a)$$

$$R(i, i - \frac{DI}{\Delta T}) = \alpha \quad (30b)$$

Des tests aux limites sont ajoutés pour s'assurer qu'on ne sorte pas de l'intervalle $[I_{MINI}, I_{MAXI}]$. La matrice résultante « avec puisage » $Q \cdot R$ reste alors la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène.

3.6. Démonstration de l'ergodicité de la chaîne de Markov

Une classe C d'états de E est dite fermée s'il n'existe pas d'états en dehors de C qui puissent être atteints à partir d'un état de C . Une chaîne de Markov est dite **irréductible** s'il n'existe pas d'autre classe fermée que la classe de tous ses états ; c'est le cas de celle que nous considérons. En effet, les équations (22) et (24) montrent qu'il ne peut y avoir de sous-classe fermée de E_1 ou E_0 , le passage de la classe E_1 (respectivement E_0) à la classe E_0 (E_1) est assuré par les équations (28) et (29).

Un état est appelé périodique si un retour à cet état est possible seulement en un nombre de pas de temps entiers multiples d'un entier d . Le plus grand entier vérifiant cette propriété est appelé période de l'état (lorsque $d = 1$, l'état est dit apériodique). Par construction, tous les états de notre chaîne de Markov vérifient $d = 1$, elle est donc **apériodique**. La démonstration est évidente par les équations (22) et (24) pour $i = j$.

Le théorème de Markov ([SRI81], p. 292), nous apprend que tous les états d'une chaîne de Markov de dimension finie, irréductible et apériodique sont récurrents positifs et donc **ergodiques**. La chaîne de Markov étudiée est donc par définition ergodique. On peut alors appliquer le théorème de Kolmogorov dans le cas ergodique [BRE91], p. 71) :

si la chaîne est ergodique, alors, pour toute distribution initiale f_0 , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} = \pi \quad (31)$$

où π est l'unique probabilité stationnaire de la chaîne.

Les probabilités stationnaires peuvent être interprétées de deux façons : elles représentent les probabilités du régime permanent, mais elles donnent aussi la proportion de temps à long terme que le processus passe dans chaque état.

Si l'on note I la matrice-identité de la dimension de Q , π vérifie le système suivant :

$$\pi \cdot Q = \pi \cdot I \quad (32)$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}+L_{\text{MAXI}}} \pi(i) = 1 \quad (33)$$

La solution de ce système est obtenue par inversion de la matrice de dimension $(2L_{\text{MAXI}}+1, 2L_{\text{MAXI}}+1)$ donnée par les équations (32) et (33). L'ergodicité traduit le fait qu'une évolution partant de conditions initiales quelconques amène sûrement le système, à l'infini temporel, à un régime macroscopique stationnaire. Dans notre cas, les équations réversibles et purement déterministes du mouvement microscopique (i.e. d'un chauffe-eau) donnent naissance à un comportement macroscopique (i.e. sur le parc), statistique et irréversible. Cela ne veut

évidemment pas dire que le système soit figé à l'échelle microscopique : il ne cesse d'évoluer, mais son état macroscopique reste inchangé en moyenne ; on peut y voir un parallèle intéressant avec la physique statistique, voir [FER77].

4. Applications

4.1. Validation de la solution ergodique

Le cas d'étude choisi est un parc d'appareils typiques français (de caractéristiques unitaires moyennes : $P = 2.4 \text{ kW}$, $M = 200 \text{ l}$, $c_p = 4\,186 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$, $K = 1.85 \text{ W/°C}$, $T_{\text{HAUTE}} - T_{\text{BASSE}} = 5 \text{ °C}$, $T_{\text{HAUTE}} = 65 \text{ °C}$, $\Delta t = 1 \text{ mn}$, $\Delta T = 1 \text{ °C}$) sur lequel on a préalablement identifié un terme aléatoire gaussien de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = 0.005$. La probabilité de puisage est $\alpha = 1 \%$ (pour $\Delta t = 1 \text{ mn}$), avec $DI = 5 \text{ °C}$.

La validation de la valeur moyenne de la puissance agrégée est réalisée à partir de la valeur donnée par un bilan enthalpique intégré du chauffe-eau. Le calcul ergodique donne une puissance agrégée unitaire moyenne de 773.7 W contre 774.0 W attendu. L'erreur relative induite par notre modélisation sur le bilan moyen du parc est donc dans ce cas de moins de 0.1% .

Reste à valider la forme des fonctions de répartition. Pour cela, on utilise une méthode de Monte-Carlo stochastique réalisée sur un parc de $10\,000$ chauffe-eau. La très bonne concordance entre la solution ergodique et la simulation de Monte-Carlo stochastique, plus coûteuse en temps de calcul, est présentée figures 5 et 6. Notons que les conditions absorbantes (population ON et $T > T_{\text{HAUTE}}$ impossible, population OFF et $T < T_{\text{BASSE}}$ impossible) sont respectées.

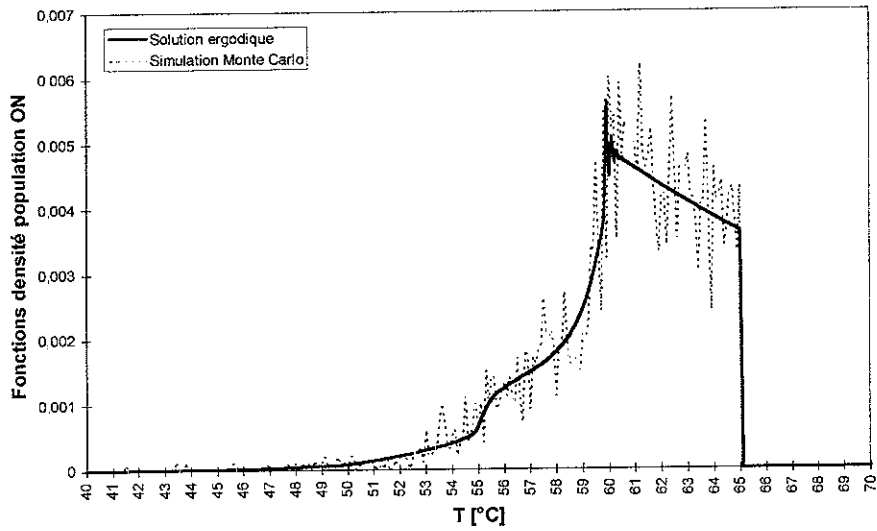


Fig. 5. Validation de la fonction densité ergodique de la population ON

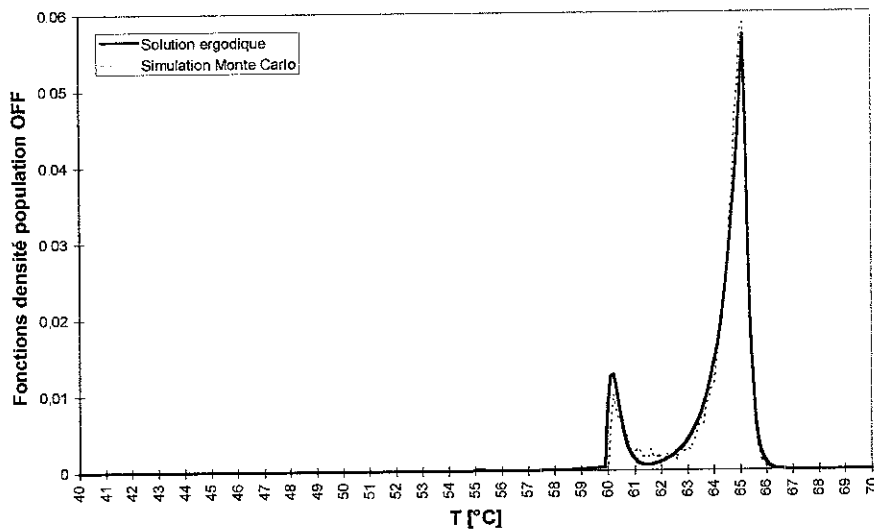


Fig. 6. Validation de la fonction densité ergodique de la population OFF

4.2. Utilisation pour les simulations

Pour des **problématiques stationnaires**, on utilise les propriétés ergodiques de la chaîne de Markov. Sur un intervalle de temps pour lequel les sollicitations et l'état macroscopique du parc sont stationnaires, on peut écrire :

$$P_{\text{AGREGEE}} = \left[\sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}} \pi(i) \right] \cdot P_{\text{UNITAIRE}} \quad (34)$$

où π désigne la solution ergodique de la chaîne de Markov et P_{UNITAIRE} est la puissance unitaire installée moyenne. La répartition du parc par niveaux de températures est donnée directement par les composantes du vecteur π .

Lors de l'étude de **problèmes dynamiques**, on doit utiliser la matrice de transition associée à la chaîne de Markov. Le passage de la distribution du parc d'un pas de temps à l'autre est donné par l'équation :

$$f_{n+1} = f_n \cdot P \quad (35)$$

où $f_n = [f_{1,n} \ f_{0,n}]$ est le vecteur représentant les fonctions densité des températures de populations ON (pour f_1) et OFF (pour f_0) au $n^{\text{ième}}$ pas de temps. La puissance agrégée unitaire s'écrit :

$$P_{\text{AGREGEE}}(t) = \left[\sum_{i=1}^{L_{\text{MAXI}}} f(i) \right] \cdot P_{\text{UNITAIRE}} \quad (36)$$

La répartition du parc par niveaux de température à l'instant n est donnée directement par les composantes du vecteur f_n .

4.3. Cas d'un parc avec contrôle-commande

Pour les systèmes pour lesquels un stockage d'énergie thermique est possible, dont les chauffe-eau électriques à accumulation, les compagnies électriques peuvent mettre en place des stratégies de contrôle-commande direct permettant de mieux gérer la forme des courbes de charge globales. L'altération du fonctionnement de l'appareil est réalisée par envoi d'un signal (radio, électrique ou téléphonique) vers l'installation du consommateur.

On peut opposer le contrôle massif et systématique 'à la française' (en France, 6 millions de chauffe-eau électriques sont contrôlés par le double signal du tarif domestique heures creuses) du contrôle en temps réel et modulé 'à l'américaine' (près d'un million d'appareils contrôlés

aux Etats-Unis). Pour ce dernier, ce sont les dispatcheurs qui décident ponctuellement de l'arrêt de l'alimentation de parcs locaux d'appareils pour des durées courtes permettant de passer la pointe du réseau (typiquement moins de 4 h par jour). Cette technique est plus complexe à maîtriser (reports de charge) mais plus souple.

La modélisation par chaînes de Markov proposée dans cet article est adéquate pour étudier de telles stratégies de contrôle-commande. On utilise alors deux matrices de transition (pas de temps avec et sans contrôle). Nous étudions ici trois durées de contrôle : 10 mn, 2h et 4h pendant lesquelles l'alimentation électrique des résistances des appareils constituant le parc est coupée. La figure 7 donne l'évolution dynamique de la puissance agrégée.

Dans les trois cas, le retour à l'état d'équilibre stationnaire est assuré en une durée supérieure à celle du contrôle-commande. Pour le contrôle de 4 heures, la pointe lors du recouvrement énergétique est de près de trois fois la puissance évitée. On retrouve ici le problème du 'load pickup' si délicat à évaluer pour les compagnies électriques utilisant ce type de stratégies.

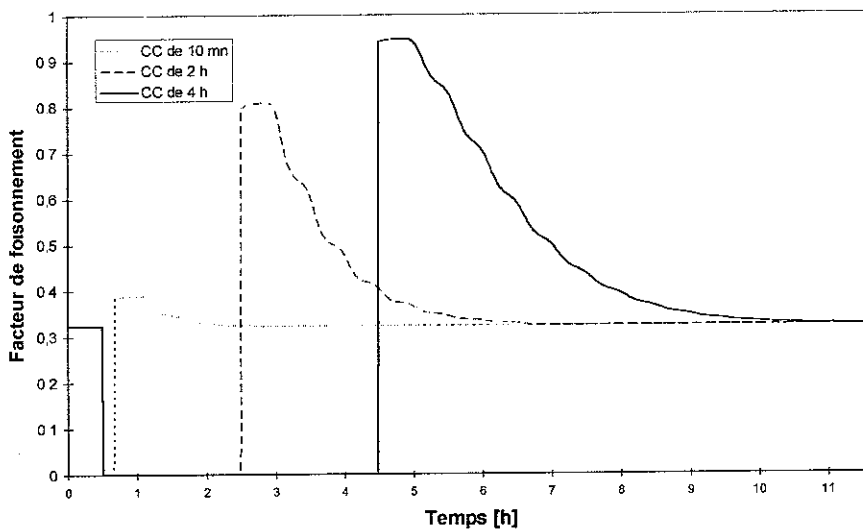


Fig. 7. Influence des stratégies de contrôle-commande sur le facteur de foisonnement

Notons que l'étude des fonctions de densité des modèles sur les niveaux de températures permet alors d'estimer le pourcentage de foyers en situation d'inconfort (température de l'eau trop basse) en raison du contrôle-commande.

5. Conclusion

La principale richesse du modèle proposé est qu'il est basé sur les équations physiques décrivant le fonctionnement des appareils. Le niveau d'information obtenu en sortie est ainsi satisfaisant : on a accès à la répartition du parc sur les niveaux de températures, et donc à la caractérisation du confort des usagers. Des stratégies de contrôle-commande peuvent également être testées. Les compagnies électriques commencent d'ailleurs à utiliser de telles approches à la place de campagnes d'instrumentation préliminaires, souvent longues et coûteuses.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [BRE91] BREMAUD P., (1991), Processus stochastiques, *Centre d'édition et de documentation de l'ENSTA*
- [BRO88] BRODY T., (1988), The Philosophy Behind Physics, *Edited by Luis de la Pena and Peter Hodgson*
- [CAS90] CASATI G. (1990), La Théorie Ergodique et le Comportement Stochastique dans les Systèmes Non-Linéaires, paru dans *La Pensée Physique Contemporaine, Edition Fondation Louis de Broglie*
- [(DOL93)] DOLAN P.S. and NEHRIR M.H., (1993), An Aggregate Model for Residential Electric Water Heater Loads, *Proceedings of the 1993 IEEE North American Power Symposium*, pp. 596-604
- [FAR64] FARQUAR I.E., (1964), Ergodic Theory in Statistical Mechanics, in *Monographs in Statistical Physics and Thermodynamics, Interscience*
- [FER77] FER F., (1977), L'Irréversibilité, Fondement de la Stabilité du Monde Physique, *Collection Discours de la Méthode*

- [KAM92] KAMOUN S. and MALHAME R., (1992), Convergence Characteristics of a Maximum Likelihood Load Model Identification Scheme, *Automatica*, Vol. 28, No. 5, pp. 885-896
- [LAN96] LANE I.E. and BEUTE N., (1996), A Model of the Domestic Hot Water Load, *Proceedings of the IEEE Power Engineering Society Winter Meeting*, paper 96 WM 238-6 PWRS
- [MAL83] MALHAME R., (1983), A Statistical Approach for Modeling a Class of Power Systems Loads, Ph.D. thesis, *Georgia Institute of Technology*
- [MAL90] MALHAME R., (1990), A Jump-Driven Markovian Electric Load Model, *Adv. Appl. Prob.*, No. 22, pp. 564-586
- [ORPa99] ORPHELIN M. and ADNOT J., (1999), Improvement of Methods for Reconstructing Water Heating Aggregated Load Curves and Evaluating Demand Side Control Benefits, *IEEE Transactions on Power Systems*, PE-447-PWRS-0-10
- [ORPb99] ORPHELIN M., (1999), Méthodes pour la reconstitution de courbes de charge agrégées des usages thermiques de l'électricité, Thèse de Doctorat, *Centre d'Energétique de l'Ecole des mines de Paris*
- [SRI81] SRINIVASAN S.K. and MEHATA K.M., (1981), Probability and Random Processes, *Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited*
- [VAN96] VAN TONDER J.C. and LANE I.E., (1996), A Load Model to Support Demand Management Decisions on Domestic Storage Water Heater Control Strategy, *Transactions of the 1996 IEEE/PES Winter Meeting*, paper 96 WM 236-0 PWRS
- [WIL96] WILLIS H.L., (1996), Spatial Electric Load Forecasting, *Marcel Dekker Inc.*, ISBN 0-8247-9425-7

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur Jérôme Adnot dont les conseils m'ont été plus que précieux tout au long de ce travail.

