Un problème de fiabilité

kosmanek@aol.com

Ce problème a été posé par Madame Edith Kosmanek, enseignante à l'Université de Paris I et brevetée pilote privé d'avion, et résolu par Monsieur Jean Moreau de Saint-Martin, ancien élève de Polytechnique.

Quadrature n° 4 Mai/Juin 1990

Y a-t-il un probabiliste dans l'avion ?

Biréacteur, Triréacteur, Quadriréacteur ... et Loi Binomiale

par Edith KOSMANEK,
Université de Paris 1

*à André TURCAT,
pilote d'essai du Concorde.*

Je suis docteur 3ème cycle en maths et brevetée pilote privé d'avion. J'étais bien plus émoustillée le jour de mon premier vol "solo" que le jour de ma soutenance de thèse. L'aviation, c'est super-excitant !

Alors, quand j'ai vu dans le livre de probabilités de madame Jacqueline Fourastié, un exercice simple proposant de comparer la fiabilité d'un biréacteur et d'un quadriréacteur, j'ai été intéressée et intriguée : comment, le quadriréacteur n'est pas toujours le plus sûr, toutes choses égales par ailleurs ? !
Eh bien non, il existe une valeur discriminante pour p, la probabilité de panne d'un réacteur, au-dessus de laquelle le biréacteur est le plus sûr ! Dans la foulée, je me suis amusée à comparer un biréacteur et un triréacteur, un triréacteur un quadriréacteur - toujours avec des surprises ! Il existe aussi des hexaréacteurs (l'Antonov russe) et même des octomoteurs (un bombardier américain de la 2e W.W.). Mais je laisse au lecteur le soin de poursuivre le jeu et, pourquoi pas, d'établir la formule générale de comparaison d'un n-réacteur et d'un m-réacteur.
Mon enseignement intensif en régime accéléré du 1er cycle universitaire est trop épuisant pour que je puisse investir longuement dans les exercices aéro-ludiques.

Quadrature ne manquera pas de publier la solution générale et ce sera la gloire pour l'auteur (une "autrice" de préférence).

• Biréacteur et Quadriréacteur

Notations :

– p : probabilité de panne d'un réacteur quelconque au cours d'un vol quelconque.
– X_B (resp. X_Q) : variable aléatoire représentant le nombre de pannes d'un biréacteur (resp. quadriréacteur) au cours d'un vol donné.
– P_B (resp. P_Q) : probabilité de vol réussi d'un bi- (resp. quadri-).

Hypothèses :

– Les réacteurs fonctionnent de manière indépendante.
– Un avion ne peut achever son vol que si la moitié, au moins, des réacteurs fonctionne normalement.

Proposition :

Le quadriréacteur est l'avion le plus sûr pour $p \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$.

Le biréacteur est l'avion le plus sûr pour $p \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$.

Démonstration :

Il est évident que les v.a. X_B et X_Q suivent des lois binomiales

$X_B \to \mathbf{B}\ (2, p)$; $X_Q \to \mathbf{B}\ (4, p)$.

d'où : $P_B = 1 - p\,(X_B = 2) = 1 - p^2$;

$$P_Q = 1 - [\,p\,(X_Q = 3) + p\,(X_Q = 4)\,] = 1 - 4\,(1-p)\,p^3 - p^4 = 1 - 4\,p^3 + 3\,p^4.$$

donc $\Delta p = P_Q - P_B = p^2 - 4\,p^3 + 3\,p^4 = p^2\,(p-1)\,(3\,p-1)$

3 cas : $0 < p < \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta p > 0 \Rightarrow$ quadriréacteur le plus sûr.

$p = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow$ même sécurité pour les 2 avions.

$\frac{1}{3} < p < 1 \Rightarrow \Delta p < 0 \Rightarrow$ biréacteur le plus sûr.

N.B. Actuellement, p est de l'ordre de 10^{-4} ; $p \geq \frac{1}{3}$ relève de l'époque héroïque de l'aviation

• Biréacteur et Triréacteur

Certains triréacteurs ne tolérent qu'une seule panne, d'autres deux. Dans le 1er cas, des calculs similaires montrent que le biréacteur est le plus sûr $\forall\, p \in]\,0, 1\,[$; dans le 2ème cas, c'est le triréacteur $\forall\, p \in]\,0, 1\,[$.

• Triréacteur et Quadriréacteur

Avec la 1ère hypothèse, le quadriréacteur est le plus sûr $\forall\, p \in]\,0, 1\,[$. Avec la 2ème, le triréacteur est le plus sûr $\forall\, p \in]\,0, 1\,[$.

Aériennement vôtre.
E. K.

Réponse

1. Jean Moreau de Saint-Martin

13 rue Gandon

F-75013 PARIS

La recherche d'une plus grande fiabilité est une des raisons de mettre plusieurs moteurs sur des appareils tels que des avions, mais cela a pu donner lieu à quelques controverses. Plus il y a de moteurs, plus cela donne de ressources, mais aussi plus cela donne d'occasions de pannes ! Et on peut se trouver devant des résultats un peu paradoxaux, ou du moins inattendus, quand on calcule les probabilités de non-défaillance.

Certes, le bon sens ne perd pas ses droits : de deux avions capables de voler sur un seul moteur, le trimoteur serait plus sûr que le bimoteur ; mais celui-ci est plus sûr qu'un trimoteur qui ne peut pas voler avec deux moteurs en panne (on suppose ici, comme dans toute la suite, que le risque de panne au cours d'un vol est le même pour tous les moteurs). Quant à comparer deux avions (bimoteur et quadrimoteur) pouvant voler avec la moitié de leurs moteurs en panne, le résultat dépend du risque de panne d'un moteur ; s'il est faible (cas normal), le quadrimoteur est plus sûr que le bimoteur ; mais si ce risque dépassait 1/3 (on n'en est heureusement plus là, avec les progrès faits depuis Clément Ader !), l'avantage reviendrait au bimoteur.

Pour étendre les résultats ci-dessus, Edith KOSMANEK a demandé (dans la revue Quadrature de mai-juin 1990) s'il y avait une *formule générale pour comparer la fiabilité de deux types d'avion*. La réponse est oui, comme on va le voir.

L'avion **A** va être décrit par la donnée de son nombre **m** de moteurs, et du nombre minimal **f** de moteurs dont il a besoin pour pouvoir se maintenir en vol. Les données analogues pour l'avion **B** sont **n** et **g**. La probabilité de panne d'un moteur est **p**, et je noterai **1-p=q**.

Le nombre de moteurs de A qui tombent en panne au cours d'un vol est une variable aléatoire X_A suivant la loi binomiale de paramètres m et p :

$$\text{Proba}\,(X_A = k) = C_m^k p^k q^{m-k}$$

d'où la probabilité globale de non défaillance pour A :

$$F_A = \text{proba}(0 \le X_A \le m-f) = \sum_{k=f}^{m} C_m^k p^{m-k} q^k$$

et de même pour B :

$$F_B = \sum_{i=g}^{n} C_n^i p^{n-i} q^i$$

Il s'agit de comparer F_A et F_B.

1. **Si m=n,** la comparaison est immédiate, l'une des sommes se réduisant aux termes communs. La différence FA - FB a le signe de (g-f)=(m-f) - (n-g) ; le type le plus sûr est le moins **exigeant (en nombre minimal f ou g de moteurs en état), ou encore le plus tolérant (en nombre maximal m-f ou n-g de moteurs en panne).**
2. Mais nous cherchons une formule générale ; **supposons par exemple m>n.** Quelques transformations vont permettre d'identifier de nouveau des termes communs dans les deux expressions F_A et F_B.

F_A est un polynôme homogène de degré m en p et q. Donnons à F_B la même propriété en le multipliant par $(p+q)^{m-n}$ qui vaut 1 :

$$(p+q)^{m-n} = \sum_{j=0}^{m-n} C_{m-n}^{j} p^{m-n-j} q^{j}$$

d'où F_B comme polynôme de degré m :

$$\boxed{F_B = \sum_{k=g}^{m} p^{m-k} q^{k} \sum_{i=g}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}}$$

en admettant que $C_a^b = 0$ si b est extérieur à [0,a].

Mettons maintenant les termes de F_A sous la même forme, grâce à l'identité bien connue :

$$C_m^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}$$

(considérer par exemple le développement de $(1+x)^m = (1+x)^n (1+x)^{m-n}$).

$$\boxed{F_A = \sum_{k=f}^{m} p^{m-k} q^{k} \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}}$$

2.1. Si $f \leq g$, tous les termes (i,k) de F_B se trouvent dans F_A. *Le type A est le plus sûr, c'est aussi le plus « tolérant »* au sens donné plus haut à cette expression, car n-g<m-f ; en *même temps il n'est pas le plus « exigeant ».*

2.2. Si $f > g$, les termes communs (i,k) correspondent à $f \le k \le m$ et $g \le i \le n$, et on obtient pour la différence :

$$\boxed{F_A - F_B = \sum_{k=f}^{m}\sum_{i=0}^{g-1} p^{m-k}q^k C_n^i C_{m-n}^{k-i} - \sum_{k=g}^{f-1}\sum_{i=g}^{n} p^{m-k}q^k C_n^i C_{m-n}^{k-i}}$$

En outre, dans la première somme, les termes non nuls vérifient $k \le m-n+i \le m-n+g-1$, ce qui permet d'écrire, avec k=g+j :

$$\frac{F_A - F_B}{p^{m-g}q^g} = \sum_{j=f-g}^{m-n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j \sum_{i=0}^{g-1} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j} - \sum_{j=0}^{f-g-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j \sum_{i=g}^{n} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j}$$

- ❖ Si $m-n > f-g > 0$ (A est à la fois le plus tolérant et le plus exigeant), le second membre est un polynôme en q/p de degré m-n-1 (>0), avec un seul changement de signe dans la suite de ses coefficients. Conformément à un théorème de Descartes[1], ce polynôme a exactement **une racine positive u** (fonction implicite de m, n, f, g) :

- il est positif (donc A est le plus sûr) si $\frac{q}{p} > u$, ou $0 < p < \frac{1}{1+u} < 1$.
- il est négatif (donc B est le plus sûr) si $\frac{q}{p} < u$, ou $\frac{1}{1+u} < p < 1$.

C'est le seul cas où le résultat dépend de p.

- ❖ En effet, les termes négatifs disparaissent si $m-n \ge 0 \ge f-g$ (cas déjà traité).
- ❖ De même, les termes positifs disparaissent si $f-g \ge m-n \ge 0$: A n'est pas moins exigeant ni plus tolérant ; A n'est pas le plus sûr.

Conclusion

On peut résumer le résultat de la discussion par les règles suivantes :

- *Le plus tolérant n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le plus exigeant et si p dépasse la valeur limite 1/(1+u) ;*
- *à tolérance égale, le moins exigeant est le plus sûr.*

Autre formulation équivalente :

- *Le moins exigeant n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le moins tolérant et si p est inférieur à la valeur limite 1/(1+u) ;*
- *à exigence égale, le plus « tolérant » est le plus sûr.*

La valeur limite peur être explicitée quand $m-n = 2(f-g) = \pm 2$, cas où le polynôme se réduit au premier degré : *la valeur limite est alors g/(n+1).*

[1] André WARUSFEL : Dictionnaire raisonné de Mathématiques, éditions du Seuil.