Contributions à la coloration des hypergraphes basées sur les traverses minimales

M. Nidhal JELASSI* **, Sadok BEN YAHIA** Christine LARGERON*

* Université Jean Monnet, Saint-Etienne, France.
nidhal.jelassi, christine.largeron@univ-st-etienne.fr
**Université Tunis El Manar, Faculté des Sciences de Tunis,
LIPAH-LR 11ES14, 2092 Tunis, Tunisie.
nidhal.jelassi, sadok.benyahia@fst.rnu.tn

1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à la problématique de la coloration d'hypergraphes en l'abordant suivant une approche originale, qui met en lumière le lien qui existe entre le nombre chromatique et les traverses minimales.

Nous proposons deux algorithmes TM2COLORS et TMXCOLORS. Le premier permet de vérifier si un hypergraphe possède la propriété de 2-coloriabilité. Le second est une extension du premier qui calcule le nombre chromatique de l'hypergraphe d'entrée.

Notons qu'un des avantages de l'approche que nous proposons, par rapport à la majorité des méthodes existantes, est qu'elle est applicable à n'importe quel type d'hypergraphe, qu'il soit bipartite, k-uniforme, dense ou aléatoire.

2 Contribution

Le pseudo-code de TM2COLORS est décrit par l'algorithme 1. Il prend en entrée un hypergraphe H et retourne une valeur booléenne en fonction de la vérification de la propriété de 2-colorabilité. La première étape de TM2COLORS consiste à calculer les traverses minimales de taille égale au nombre de transversalité (ligne 2). Pour cette étape, nous utilisons le meilleur algorithme existant en termes de performances, i.e., MMCS de Murakami et Uno (2013) mais n'importe quel autre algorithme de calcul des traverses minimales pourrait être retenu. Une fois l'ensemble des plus petites traverses minimales déterminé et stocké dans TM, TM2COLORS passe au traitement des éléments de TM (ligne 3). Pour chaque traverse minimale T de TM, une variable booléenne, *Two*, est initialisée à *Vrai* (ligne 4) et l'algorithme parcourt l'ensemble des hyperarêtes de H (ligne 5). S'il en trouve une qui est incluse où égale dans T, alors *Two* prend *Faux* (lignes 6-7). En effet, dans ce dernier cas, l'affectation de *Faux* à *Two* équivaut à affirmer que T ne permet pas de vérifier la propriété de 2-colorabilité de H. Qu'une hyperarête e soit incluse dans T, équivaut à affirmer que e ne contient que des sommets qui appartiennent à T. Ainsi, sachant que les sommets de T sont colorés avec la même couleur, cette hyperarête e se trouve en contradiction avec le principe même de la coloration d'hypergraphe. D'autre part,

Algorithme 1 : TM2COLORS

```
   Entrées : H = (𝒳, ξ) : Hypergraphe
   Sorties : H est 2-coloriable (Vrai) où non (Faux)
1  début
2      TM ⟵ Calcul_TM_plus_petites(H) ;
3      pour chaque T ∈ TM faire
4          Two ⟵ Vrai ;
5          pour chaque e ∈ ξ faire
6              si e ⊆ T alors
7                  Two ⟵ Faux ;
8                  Aller à Ligne 3 ;
9          si Two = Vrai alors
10             retourner (Vrai) ;
11     retourner (Faux) ;
```

si *Two* ne varie pas tout au long du parcours de toutes les hyperarêtes, alors l'algorithme retourne *Vrai* (ligne 10). L'hypergraphe d'entrée est alors 2-coloriable. A noter que l'instruction de la ligne 8 est une optimisation qui épargne à notre algorithme d'évaluer, pour une traverse T, le reste des hyperarêtes dès qu'il en détecte une qui est incluse dans T. Au final, nous avons donc 2 scénarios possibles. Si pour une traverse minimale T, l'algorithme retourne *Vrai*, alors l'hypergraphe d'entrée est 2-coloriable tels que les deux couleurs (ou partitions) sont : $C1 = T$ et $C2 = X \setminus T$. Évidemment, TM2COLORS s'arrête à la première traverse minimale qui permet de garantir la propriété de 2-colorabilité et ne continue pas le traitement du reste des traverses minimales de TM. Par contre, si l'algorithme ne retourne jamais *Vrai*, pour tout T de TM, i.e., après avoir parcouru toutes les traverses minimales de TM, alors l'hypergraphe d'entrée n'est pas 2-coloriable et l'algorithme retourne Faux.

Notre seconde contribution est l'algorithme TMXCOLORS, qui évalue le nombre chromatique d'un hypergraphe donné en entrée. Il s'agit d'une extension de TM2COLORS qui repose sur le même principe. Sa principale différence est que, désormais, toutes les plus petites traverses minimales sont traitées, de manière récursive. Opérant ainsi, on sera en mesure de déterminer le plus petit nombre chromatique est donnée en sortie par l'algorithme. Des expérimentations effectuées sur divers jeux de données ont montré l'intérêt de notre approche.

Summary

In this paper, we propose two contributions about the determination of chromatic number and the verification of the 2-colorability property. We introduce an unreleased relation between the problem of hypergraph coloring and the computation of minimal transversals hypergraph and, especially, a subset of them. Thereby, we propose two algorithms in order to optimize the verification of the 2-colorability property of hypergraphs and the evaluation of the chromatic number. Experiments carried out on several types of hypergraphs, showed that our algorithm obtains very interesting results.