Concept de prï¿½topologie temporelle pour l'analyse des ï¿½volutions structurelles

Nazha Selmaoui-Folcher*, Jannai Tokotoko*
Samuel Gorohouna**, Laisa Roi**

*ISEA - Universitï¿½ de la Nouvelle Calï¿½donie
nazha.selmaoui@univ-nc.nc, tokotokojannai@yahoo.fr
**LARJE - Universitï¿½ de la Niouvelle Calï¿½donie

Résumé. La prï¿½topologie est un modï¿½le mathï¿½matique dï¿½veloppï¿½ par affaiblissement d'une axiomatique de la topologie. Elle a d'abord ï¿½tï¿½ utilisï¿½e dans les sciences ï¿½conomiques, sociales, physiques et biologiques, puis dans la reconnaissance de formes et l'analyse d'images. Elle permet de travailler dans un cadre mathï¿½matique aux propriï¿½tï¿½s faibles, et la non idempotence de l?opï¿½rateur d?adhï¿½rence permet d'implï¿½menter des algorithmes itï¿½ratifs. Il propose un formalisme gï¿½nï¿½ralisant les concepts de la thï¿½orie des graphes et modï¿½lise les problï¿½mes de maniï¿½re universelle. Dans cet article, nous ï¿½tendrons ce modï¿½le pour analyser des donnï¿½es complexes avec la dimension temporelle. Nous dï¿½finissons la notion d'espace prï¿½topologique temporel. Nous donnons un exemple basï¿½ sur une relation binaire appelï¿½ prï¿½topologie temporelle des descendants d'ordre p. Nous prï¿½sentons deux notions de sous-structures temporelles : k-stable et fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire temporel. Nous proposons des algorithmes pour extraire ces sous-structures. Nous expï¿½rimentons notre proposition sur 4 jeux de donnï¿½es rï¿½elles.

1 Introduction

L'analyse structurelle est l'un des domaines qui a permis l'analyse des rï¿½seaux sociaux, l'ï¿½conomï¿½trie sectorielle, etc (Largeron et Bonnevay, 2002). Les interactions entre les individus (sommets) sont importantes ï¿½ ï¿½tudier, elles sont de diffï¿½rentes natures et concernent des dï¿½pendances, des influences ou d'autres relations.
Des scientifiques comme (Auray et al., 1979; Duru, 1980; Emptoz, 1983) ont dï¿½veloppï¿½ le concept d'espace prï¿½topologique par affaiblissement d'une axiomatique de la topologie. Cela a permis d'ï¿½tudier les structures topologiques faibles, en particulier les structures discrï¿½tes et finies, ï¿½ l'aide de modï¿½les construits pas ï¿½ pas (phï¿½nomï¿½nes de propagation) tels que la diffusion d'informations dans des rï¿½seaux complexes. Contrairement ï¿½ la topologie, la prï¿½topologie est dï¿½finie par une fonction appelï¿½e *adhï¿½rence* (pseudo-fermeture) qui n'est pas nï¿½cessairement idempotente.
La prï¿½topologie a trouvï¿½ ses premiï¿½res applications dans les sciences sociales et l'ï¿½conomï¿½trie

(Auray et al., 1979; Duru, 1980), les rï¿½seaux sociaux (Levorato, 2011; Basileu et al., 2012; Dalud-Vincent et al., 2001), la reconnaissance de formes (Emptoz, 1983), l'analyse d'images (Lamure, 1987; Arnaud et al., 1986; Selmaoui et al., 1993), entre autres. Ces derniï¿½res annï¿½es, les chercheurs ont repris les bases de la prï¿½topologie pour l'appliquer dans de nombreux domaines tels que l'apprentissage machine (Le et al., 2007) ou l'exploration de textes (Cleuziou et al., 2011). Elle a montrï¿½ son intï¿½rï¿½t pour la construction de modï¿½les mathï¿½matiques adaptï¿½s aux structures d'ensembles d'ï¿½lï¿½ments afin de rï¿½aliser des analyses structurelles de donnï¿½es, d'extraire des tendances (clustering) ou de prï¿½dire des ï¿½vï¿½nements (classification supervisï¿½e). Elle propose un formalisme qui gï¿½nï¿½ralise les concepts de la thï¿½orie des graphes (Dalud-Vincent et al., 2001).
La prï¿½topologie ayant ï¿½tï¿½ principalement utilisï¿½e pour les donnï¿½es statiques, notre contribution consiste ï¿½ l'ï¿½tendre ï¿½ l'analyse des donnï¿½es spatio-temporelles. Nous ï¿½tablissons un nouveau formalisme du concept de prï¿½topologie temporelle afin de construire un cadre thï¿½orique de l'ï¿½volution temporelle et structurelle. Nous donnons quelques exemples d'ï¿½volution ï¿½ partir de la fonction d'adhï¿½rence (pseudo-fermeture) temporelle. Nous proposons une premiï¿½re ï¿½tude appliquï¿½e ï¿½ l'ï¿½volution des donnï¿½es ï¿½conomiques intersectorielles en formalisant cette dynamique par une sï¿½quence d'espaces prï¿½topologiques. Dans la section 2, nous rappellerons les dï¿½finitions de base du modï¿½le prï¿½topologique, la section 3 prï¿½sente les premiï¿½res dï¿½finitions et formalismes du nouveau concept des espaces prï¿½topologiques temporels. La section 3.1 prï¿½sente le processus de construction d'un espace prï¿½topologique. Dans la section 4, nous donnons deux exemples d'analyse de sous-structure prï¿½sentant les ï¿½volutions dans le temps. Dans la section 5, nous prï¿½sentons les rï¿½sultats de notre modï¿½le appliquï¿½ sur 4 jeux de donnï¿½es rï¿½elles avec deux ensembles de donnï¿½es ï¿½conomiques. La section 6 prï¿½sente la conclusion et les perspectives.

2 Dï¿½finitions de bases et formalisme

Notre approche consiste ï¿½ intï¿½grer une dimension temporelle dans un espace prï¿½topologique. Afin de mieux prï¿½senter notre approche, nous rappelons briï¿½vement les dï¿½finitions et les concepts de base d'un modï¿½le prï¿½topologique. Pour plus de dï¿½tails, le lecteur peut se rï¿½fï¿½rer ï¿½ (Belmandt, 1993; Bui, 2018).

Considï¿½rons un ensemble de population non vide (individus, objets, etc.) E sur lequel nous dï¿½finissons un processus d'extension a associï¿½ ï¿½ un processus dual i. $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. Un tel espace est appelï¿½ espace prï¿½topologique dï¿½crit par le triplet (E, i, a) oï¿½ a et i sont des opï¿½rateurs c-dual appelï¿½s *adhï¿½rence* (c'est-ï¿½-dire le processus d'extension) et *intï¿½rieur* (processus dual), respectivement.

Dï¿½finition 2.1 (Espace prï¿½topologique et adhï¿½rence) (E, a, i) *est un espace prï¿½topologique si et seulement si i et a sont des opï¿½rateurs c-duaux de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$:*
— $\forall A \in \mathcal{P}(A),\ i(A) = (a(A^c))^c$ *oï¿½ A^c est le complï¿½mentaire de A*
— $a(\emptyset) = \emptyset$
— $\forall A \in \mathcal{P}(A),\ A \subset a(A)$

L'adhï¿½rence (pseudo-fermeture) a n'est pas nï¿½cessairement idempotente comme pour un espace topologique ($a(a(A)) \neq a(A)$), c'est-ï¿½-dire nous avons : $A \subset a(A) \subset a[a(A)] \subset$

….
Cette propriï¿½tï¿½ de non-idempotence permet de construire des opï¿½rateurs itï¿½ratifs et donc des algorithmes itï¿½ratifs. Les opï¿½rateurs ï¿½tant duaux, souvent on ne dï¿½finit que l'adhï¿½rence a.

Dï¿½finition 2.2 (Sous-ensemble fermï¿½) *$A \in \mathcal{P}(E)$ est un sous-ensemble fermï¿½ de E si et seulement si $a(A) = A$.*

Dï¿½finition 2.3 (Fermeture) *$A \in \mathcal{P}(E)$, la fermeture de A dans (E, a) est le plus petit sous-ensemble fermï¿½ notï¿½ F(A) tel que $A \subset F(A)$, et $\exists p \geq 1$ tel que $F(A) = a^{p+1}(A) = a^p(A)$.*

Dï¿½finition 2.4 (Sous-ensemble fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire) *$\forall x \in E$, un sous-ensemble fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire de x notï¿½ $F(x)$ est le fermï¿½ de $\{x\}$, i.e. $\exists p \geq 1$, tel que $F(x) = a^{p+1}(\{x\}) = a^p(\{x\})$.*

Soit $x \in E$ et A est un sous-ensemble de E. $a(\{x\})$ reprï¿½sente l'ensemble des ï¿½lï¿½ments liï¿½s ï¿½ x. Dans ce cas $a(A)$ exprimera l'ensemble des ï¿½lï¿½ments en relation avec les ï¿½lï¿½ments de A. L'exemple simple qui est souvent utilisï¿½ est la relation de voisinage. Cela permet de donner un sens aux ï¿½lï¿½ments voisins de x et d'ï¿½tendre cette relation de voisinage ï¿½ A. Cette notion gï¿½nï¿½ralise la notion de voisinage que l'on retrouve dans un espace topologique mais qui est affaiblie dans un espace prï¿½topologique. Inversement, ï¿½ partir d'une relation de voisinage ou en gï¿½nï¿½ral d'une relation binaire dï¿½finie sur E, on peut construire un espace prï¿½topologique.

2.1 Types d'espaces pretopologiques

En fonction de la dï¿½finition de la pseudo-fermeture, l'espace prï¿½topologique peut vï¿½rifier certaines propriï¿½tï¿½s intï¿½ressantes qui le qualifient d'un type particulier. Dans cette section, nous prï¿½senterons les diffï¿½rents types d'espaces prï¿½topologiques qui ont ï¿½tï¿½ dï¿½finis (Auray et al., 1979; Belmandt, 1993).

Dï¿½finition 2.5 (Espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}$) *Un espace de prï¿½topologie (E, a) est appelï¿½ espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}$ si et seulement si*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \Longrightarrow (a(A) \subset a(B)) \tag{1}$$

Soit (E, a) un espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}$, nous avons les propriï¿½tï¿½s suivantes.

Proposition 2.6 *$\forall F_1, F_2$ sous-ensemble fermï¿½ dans E alors $F_1 \cup F_2$ est fermï¿½.*

Proposition 2.7 *$\forall x, y \in E, x \neq y$, deux cas possibles :*
— $F(x) \cap F(y) = \emptyset$
— $\forall z \in F(x) \cap F(y)$ *alors* $F(z) \subset F(x) \cap F(y)$

Dï¿½finition 2.8 (Espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}_\mathcal{D}$) *Un espace de prï¿½topologie (E, a) est appelï¿½ espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}_\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), (A \cup B) = a(A) \cup a(B) \tag{2}$$

Il est trï¿½s simple de montrer que si $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$ alors $(A \subset B) \Longrightarrow (a(A) \subset a(B))$.

Proposition 2.9 *Tout espace prï¿½toplogique de $\mathcal{V_D}$ est un espace prï¿½topologique de type $\mathcal{V}$.*

Ce dernier type d'espace prï¿½topologique permet de calculer la pseudo-fermeture d'un sous-ensemble fini A ï¿½ partir de la pseudo-fermeture de ces ï¿½lï¿½ments, c'est-ï¿½-dire :

$$\forall A \in E, a(A) = \cup_{x \in A} a(\{x\}) \tag{3}$$

La notion de continuitï¿½ connue de la topologie a ï¿½galement ï¿½tï¿½ dï¿½finie dans un espace prï¿½topologique.

Dï¿½finition 2.10 (Continuitï¿½) *soient (E, a_E) et (F, a_F) deux espaces prï¿½topologiques. Soit h une application de (E, a_E) vers (F, a_F). h est dite (m,n) continue sur E si et seulement si :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(A), h(a_E^m(A)) \subset a_F^n(h(A)) \tag{4}$$

Si $m = n = 1$, on dit que h est continue sur E.

2.2 Construction d'une prï¿½topologie ï¿½ partir d'une relation binaire

Soit $\Re$ une relation binaire dï¿½finie sur E. On note $\Re(x) = \{y \in E / x\Re y\}$, et on dï¿½finit $\Re^o(x) = \{x\}$, $\Re^1(x) = \Re(x)$ et $\forall p \geq 1$, $\Re^p(x) = \Re[\Re^{p-1}(x)]$. De la mï¿½me maniï¿½re, on note $\Re^{-1}(x) = \{y \in E / y\Re x\}$ et $\forall p \geq 1$, $\Re^{-p}(x) = \Re[\Re^{-p+1}(x)]$. Nous avons donc, $\forall A \subset E$, $\Re(A) = \cup_{x \in A} \Re(x)$. ï¿½ partir de la relation binaire $\Re$ nous pouvons dï¿½finir trois espaces prï¿½topologiques (Emptoz, 1983; Belmandt, 1993). On distingue 3 exemples d'espaces prï¿½topologiques :

Prï¿½topologie des ascendants d'ordre p Dï¿½signe la structure prï¿½topologique sur E avec la pseudo-fermeture ad^p dï¿½finie comme suit :

$$\forall A \in E,\ ad^p(A) = \{x \in E / \exists i, 0 \leq i \leq p, \Re^{-i}(x) \cap A \neq \emptyset\} \tag{5}$$

Prï¿½topologie des descendants d'ordre q Dï¿½signe la structure prï¿½topologique sur E avec la pseudo-fermeture ad^q dï¿½finie comme suit :

$$\forall A \in E,\ ad^q(A) = \{x \in E / \exists j, 0 \leq i \leq q, \Re^i(x) \cap A \neq \emptyset\} \tag{6}$$

Prï¿½topologie des ascendants-descendants d'ordre (p,q) Dï¿½signe la structure prï¿½topologique sur E avec la pseudo-fermeture ad^{pq} dï¿½finie comme suit :$\forall A \in E$,

$$ad^{pq}(A) = \{x \in E / \exists (i,j), 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, \Re^{-i}(x) \cap A \neq \emptyset \text{ and } \Re^j(x) \cap A \neq \emptyset\} \tag{7}$$

Proposition 2.11 *Les espaces prï¿½topologiques des ascendants d'ordre p, des descendants d'ordre q et des ascendants-descendants d'ordre (p,q) sont des espaces de type $\mathcal{V_D}$.*

3 Modï¿½le prï¿½topologique temporel : nouveau concept

La fonction de continuitï¿½ permet d'ï¿½tablir un transport des structures prï¿½topologiques d'un ensemble E vers un ensemble F. Ce transport peut ï¿½tre dï¿½fini pour ï¿½tudier des sous-ensembles de structures ï¿½voluant dans le temps.

Dans cette section, nous introduirons une nouvelle notion d'espace prï¿½topologique temporel pour ï¿½tudier des sous-structures et la relation entre les ï¿½lï¿½ments de ses sous-structures qui ï¿½voluent dans une dimension temporelle $T = \{1, \ldots, n\}$. Cette notion nous permettra d'ï¿½tablir un formalisme gï¿½nï¿½rique. Nous prï¿½senterons un exemple de prï¿½topologie temporelle construite ï¿½ partir d'une relation binaire. Nous donnerons deux exemples intï¿½ressants de sous-structures ï¿½voluant dans le temps. L'ensemble E d'ï¿½lï¿½ments reste le mï¿½me mais la pseudo-fermeture a_t peut ï¿½voluer. Ce formalisme est basï¿½ sur la dï¿½finition d'une fonction temporelle f_t qui doit respecter la contrainte de continuitï¿½ entre les espaces (E, a_t) et (E, a_{t+1}).

Dï¿½finition 3.1 (Fonction temporelle) *f_t est une fonction temporelle entre les estampilles temporelles t et $t+1$ dï¿½finie sur $\mathcal{P}(E)$ si f_t respecte la condition de continuitï¿½ entre (E, a_t) et (E, a_{t+1}). i.e. $\forall A \in \mathcal{P}(A), f_t$ vï¿½rifie $f_t(a_t(A)) \subset a_{t+1}(f_t(A))$.*

Dï¿½finition 3.2 (Espace Prï¿½topologique temporel) *Un espace prï¿½topologique temporel dans une estampille temporelle $T = \{1, \ldots, n\}$ est une sï¿½quence d'espaces prï¿½topologiques $< (E_1, a_1), \ldots, (E_n, a_n) >$ avec une fonction temporelle f_t entre E_t et E_{t+1}.*

3.1 Construction d'une prï¿½topologie temporelle

Soit G un espace prï¿½topologique temporel (c'est-ï¿½-dire une sï¿½quence de prï¿½topologies) $G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ oï¿½ $G_i = (E, a_i)$. Nous pouvons alors construire une prï¿½topologie temporelle des descendants d'ordre p ï¿½ partir d'une sï¿½quence de prï¿½topologies (E, a_i), $\forall i \in \{1, .., n\}$.

Dï¿½finition 3.3 (Fonction temporelle des descendants) *Nous appelons fonction temporelle des descendants $\Re_t$ dï¿½finie par :*

$$\forall x \in E,\ \Re_t(\{x\}) = \{y \in E / y \in a_{t+1}(x)\} \tag{8}$$

On dï¿½signe par $\Re_t^o(x) = \{x\}$, $\Re_t^1(x) = \Re_t(x)$, et $\forall p \geq 1$, $\Re_t^p(x) = \Re_t[\Re_t^{p-1}(x)]$. Nous gï¿½nï¿½ralisons cette fonction ï¿½ : $\forall A \subset E, \Re_t(A) = \cup_{x \in A} \Re_t(x)$.

Dï¿½finition 3.4 *L'espace prï¿½topologique temporel des descendants d'ordre p est (E, ad_t^p) dont la pseudo-fermeture est dï¿½finie par :*

$$\forall A \in E,\ ad_t^p(A) = \{x \in E / \exists i, 0 \leq i \leq p, \Re_t^i(x) \cap A \neq \emptyset\}. \tag{9}$$

ad_t^p est appelï¿½ pseudo-fermeture temporelle des descendants d'ordre p.

La figure 1 prï¿½sente un exemple d'espace prï¿½topologique temporel $G_1 = (E, a_1)$, $G_2 = (E, a_2)$, $G_3 = (E, a_3)$ oï¿½ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Dans cette figure, les individus sont les noeuds, un arc $u \rightarrow v$ veut dire que $v \in ad(\{u\})$. La table 1 fournit la fonction temporelle

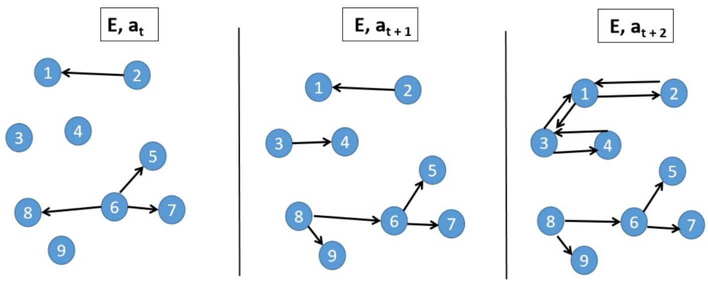

FIG. 1 – *Exemple de prï¿½topologie temporelle*

TAB. 1 – *Fonction temporelle $\Re_t$ entre t et $t+1$*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Re^1_t(x)$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{5,6,7\}$	$\{7\}$	$\{8,6,9\}$	$\{9\}$
$\Re^1_{t+1}(x)$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3,4\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{5,6,7\}$	$\{7\}$	$\{8,6,9\}$	$\{9\}$

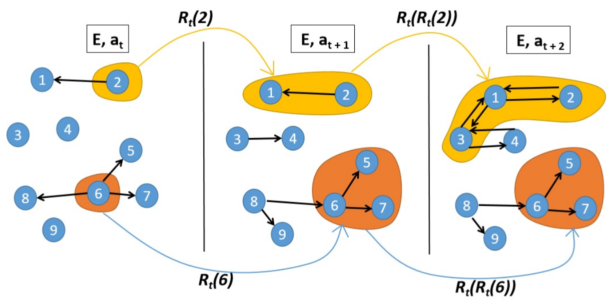

FIG. 2 – *Pseudo-fermeture temporelle des descendants d'ordre $p = 1, 2$*

des descendants $\Re_t$ et $\Re_{t+1}$ entre t, $t+1$ et $t+1$, $t+2$. La figure 2 montre l'application successive de $\Re_t$ sur E entre t, $t+1$ et $t+2$ pour les ï¿½lï¿½ments 2 et 6. Le but de la fonction temporelle est de permettre ï¿½ la pseudo-fermeture de s'ï¿½tendre temporellement jusqu'ï¿½ sa fermeture tout en gardant les propriï¿½tï¿½s de la structure prï¿½topologique.

4 Dï¿½finition de nouvelles sous-structures ï¿½voluant dans le temps

Dans certains domaines d'application, comme en ï¿½conomie, il est intï¿½ressant d'analyser les dï¿½pendances intersectorielles comme les influences sectorielles qui ï¿½voluent dans le temps ou qui restent stables pendant une pï¿½riode. Cela permet aux ï¿½conomistes d'ï¿½tablir

des prï¿½dictions de dï¿½pendances de secteurs ï¿½conomiques stables ou changeantes.
Dans cette partie, nous allons dï¿½finir deux nouvelles notions de sous-structures temporelles :

1. Sï¿½quence d'un sous-ensemble fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire qui montre l'ï¿½volution de l'influence d'un ï¿½lï¿½ment particulier sur ses descendants d'ordre p.
2. Sous-ensemble de descendants d'ordre p d'un ï¿½lï¿½ment qui est stable sur une pï¿½riode de temps fixe k que nous appelerons sous-structure k-stable.

Dans cette section, (E, ad_t^p) est l'espace prï¿½topologique temporel des descendants d'ordre p oï¿½ $t \in T = \{1, \ldots, n\}$.

4.1 ï¿½volution d'une sous-structure fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire

Dans le cadre de l'analyse structurelle, des sous-ensembles fermï¿½s ont souvent ï¿½tï¿½ ï¿½tudiï¿½s dans un espace ayant une structure prï¿½topologique. De plus, ils ont ï¿½tï¿½ utilisï¿½s pour construire des clusters ou des modï¿½les de classification supervisï¿½e. Nous allons ï¿½tendre la dï¿½finition de fermï¿½ temporel attachï¿½ ï¿½ un ï¿½lï¿½ment de l'ensemble ï¿½tudiï¿½ et nous donnerons un algorithme pour rechercher ces sous-ensembles.

Dï¿½finition 4.1 (ï¿½volution temporelle d'une sous-structure fermï¿½e ï¿½lï¿½mentaire)
$\forall x \in E$,
nous dï¿½finissons l'ï¿½volution temporelle d'une sous-structure fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire de x comme une sï¿½quence de la sous-structure fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire de x ï¿½voluant dans le temps, c'est-ï¿½-dire $(F_1(x), \ldots, F_{t_n}(x))$.

F_t est construit itï¿½rativement ï¿½ chaque temps t en appliquant une pseudo-fermeture temporelle. La figure 3 montre la construction d'une sï¿½quence d'un sous-ensemble fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire de $x = 8$ par l'algorithme 1.

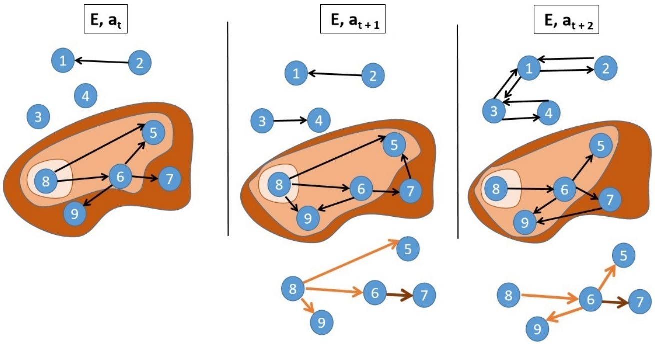

FIG. 3 – *Exemple de sï¿½quence de fermï¿½s ï¿½lï¿½mentaires temporels de $x = 8$*

4.2 Sous-structure k-stable

Une sous-structure k-stable peut ï¿½tre construite successivement ï¿½ partir de la sous-structure 2-stable.

Algorithm 1 Sous-ensemble fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire temporelle

Input :
- $\{(E, a_{t_1}), (E, a_{t_2}), \ldots, (E, a_{t_n})\}$ sï¿½quence de n espaces prï¿½topologiques
- x an element

G^p = [ ]
i = 0
for chaque espace prï¿½topologique **do**
  if premier espace **then**
    Closure = $\Re^p_{t_i}(x) \cap a^p_{t_i}(x)$
  else
    for j : 1 to p-1 **do**
      Closure = $\Re^p_{t_i}(x) \cap a^j_{t_i}(x)$
    end for
  end if
  i = i+1
end for
return G^p

Dï¿½finition 4.2 (Sous-structure 2-stable) *On dit que $A \subset E$ est une sous-structure 2-stable entre deux temps t et $t+1$ si et seulement si $\exists B \subset E,$ tel que $A = ad_t(B) = f_t(B)$*

Dï¿½finition 4.3 (Sous-structure k-stable) *Soit $k \geq 1$, $A \subset E$ est k-stable si $\exists t \in T$, tel que, A est 2-stable entre t et $t+1$, $t+1$ et $t+2$, ..., $t+k-1$ et $t+k$.*

Dï¿½finition 4.4 (Sous-structure maximale k-stable) *Soit $k \geq 1$, $A \subset E$ est maximal k-stable si et seulement si $\nexists B \subset E$ sous-structure k-stable tel que $A \subset B$.*

Ces sous-structures peuvent ï¿½tre construites de maniï¿½re itï¿½rative par pseudo-fermeture et intersections successives d'un ï¿½lï¿½ment $x \in E$. La figure 2 montre 2 exemples $\{1, 2\}$ and $\{5, 6, 7\}$ de sous-structures 3-stables ; et $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ est une structure maximale 2-stable.

5 Rï¿½sultats expï¿½rimentaux

Les expï¿½rimentations ont ï¿½tï¿½ menï¿½es sur plusieurs ensembles de donnï¿½es : 2 jeux de donnï¿½es provenant de la plate-forme d'analyse du rï¿½seau de Stanford [1] (SNAP) et 2 jeux de donnï¿½es rï¿½elles traitant de l'influence intersectorielle en ï¿½conomie de Nouvelle Calï¿½donie (jeu de donnï¿½es 1) et de France (jeu de donnï¿½es 2). Le tableau 2 donne une brï¿½ve description des ensembles de donnï¿½es.

COLLEGEMSG [2] jeu de donnï¿½es constituï¿½ de messages privï¿½s envoyï¿½s sur un rï¿½seau social en ligne de l'universitï¿½ de Californie. Un arc $u \rightarrow v$ signifie que l'utilisateur u a envoyï¿½ un message privï¿½ ï¿½ l'utilisateur v.

1. https ://snap.stanford.edu/snap/
2. https ://snap.stanford.edu/data/CollegeMsg.html

Algorithm 2 Sous-structure temporelle k-stable

Input :
- $\{(E, a_{t_1}), (E, a_{t_2}), \ldots, (E, a_{t_n})\}$ sï¿½quence de n espaces prï¿½topologiques
- x un ï¿½lï¿½ment

G^p = [ ]
i = 0
for chaque espace pretopologique V **do**
    if premier espace **then**
        $G^p(i)$= $\Re^p_{t_i}(x) \cap a^p_{t_i}(x)$// recherche de sous-ensembles 2-stables entre E, a_{ti} et E, a_{ti+1}
    else
        $G^p(i)$=Find 2-stable subset between $G^p(i-1)$ and E, a_{t_i}
    end if
    i = i+1
end for
return G^p

TAB. 2 – *Description des Donnï¿½es*

	Nb instances	Temporalitï¿½	Nb estampilles
Donnï¿½es ï¿½conomique 1	204	annï¿½e	17
Donnï¿½es ï¿½conomique 2	1139	annï¿½e	67
College message	1899	mois	9
Email-UE	986	jours	12

EMAIL-EU [3] est un ensemble de courriers ï¿½lectroniques entre les membres d'une institution de recherche europï¿½enne. Un arc ($u \rightarrow v$) signifie que la personne u a envoyï¿½ un courriel ï¿½ v.

La figure 4 montre l'ï¿½volution temporelle ï¿½ partir d'un individu pour les deux ensembles de donnï¿½es. L'algorithme met en ï¿½vidence l'ï¿½volution des interactions entre un groupe de personnes. Nous pouvons voir que la personne 3 de l'ensemble de donnï¿½es COLLEGEMSG interagit indirectement avec la personne 155 et plus directement dans les temps d'aprï¿½s. De mï¿½me pour l'individu 194 avec l'individu 311 de l'ensemble de donnï¿½es EMAIL-EU.

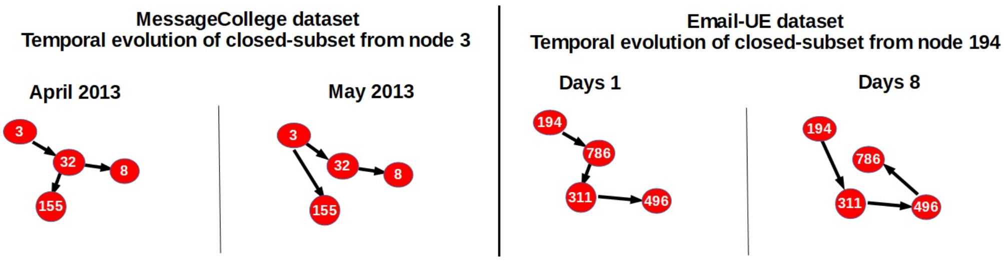

FIG. 4 – *Exemples de fermï¿½s ï¿½lï¿½mentaires temporels*

Rï¿½sultats de l'activitï¿½ ï¿½conomique L'activitï¿½ ï¿½conomique d'un pays est schï¿½matisï¿½e par diffï¿½rents flux monï¿½taires qui se rï¿½alisent sur une pï¿½riode annuelle. Les pays europï¿½ens, afin de reprï¿½senter l'ï¿½tat de leurs comptes nationaux, utilisent des tableaux entrï¿½es-sorties (I-O) prï¿½sentant ces flux monï¿½taires. L'analyse des entrï¿½es-sorties (I-O) est utilisï¿½e pour modï¿½liser l'interdï¿½pendance sectorielle. Les entrï¿½es et les sorties sont les produits consommï¿½s et vendus, en valeur monï¿½taire, par secteurs. Une industrie utilise frï¿½quemment des intrants qui sont produits par d'autres industries. De mï¿½me, les produits de cette industrie peuvent servir d'"intrants" ï¿½ d'autres industries de l'ï¿½conomie. Un exemple particuliï¿½rement simple, donnï¿½ par (Leontief, 1986), explique comment construire un tableau I/O.

La prï¿½topologie a ï¿½tï¿½ utilisï¿½e pour la premiï¿½re fois en ï¿½conomie pour analyser les dï¿½pendances intersectorielles (Auray et al., 1979; Belmandt, 1993). L'analyse structurelle a ï¿½tï¿½ rï¿½alisï¿½e ï¿½ l'aide du tableau d'entrï¿½es-sorties $T(n,n)$. Un problï¿½me important en ï¿½conomie est de mesurer les impacts de la variation de la production d'un secteur k directement sur d'autres secteurs, ou indirectement. La prï¿½topologie des descendants a permis de modï¿½liser ces liens que l'on peut reprï¿½senter par un graphe orientï¿½ oï¿½ les arcs reprï¿½sentent l'influence d'un secteur sur un autre (cf. figure 5). L'influence est retenue si les dï¿½penses intermï¿½diaires d'un secteur sur un autre est supï¿½rieure ï¿½ un seuil donnï¿½. L'ï¿½tude a ï¿½tï¿½ rï¿½alisï¿½e sur les *Donnï¿½es ï¿½conomiques 1* associï¿½ aux annï¿½es 1999 ï¿½ 2015 et sur les *Donnï¿½es ï¿½conomiques 2* de 1949 ï¿½ 2016.

3. https ://snap.stanford.edu/data/email-Eu-core.html

Le tableau $T(n,n)$ d'ï¿½lï¿½ments x_{jk} reprï¿½sente le montant des ventes de produits du secteur j au secteur k en valeur monï¿½taire. A partir de T, on construit le tableau $A(n,n)$ de terme gï¿½nï¿½rale $a_{jk} = \frac{x_{jk}}{X_k}$ avec $X_k = \Sigma_{j=1}^{n} x_{jk}$ la somme des ventes d'un secteur k sur l'ensemble des secteurs. Dans ce travail, nous utiliserons l'influence dite directe dont le seuil d'influence s sera dï¿½fini par secteur avec $s_k = \frac{\Sigma_{j=1}^{n} a_{jk}}{n}$ la valeur moyenne des influences que chaque secteur subit de la part des autres secteurs. Ainsi ï¿½ partir de la matrice $A(n,n)$, un seuil par secteur est crï¿½ï¿½ et permet de dï¿½finir la valeur au-delï¿½ de laquelle le secteur j succï¿½de au secteur k si $a_{jk} > s_k$; cela signifie que j est influencï¿½ par k (cf. figure 5). Diffï¿½rents seuils d'influence ont ï¿½tï¿½ testï¿½s, par manque de place, nous prï¿½senterons les rï¿½sultats interprï¿½tï¿½s par un expert pour ce seuil moyen.

	1	2	3	4
1	800,71	4189,92	23333,34	194,46
2	1482,37	2000,86	100,69	129,94
3	47,66	55,09	4000,65	42333,91
4	1268,00	2301,97	500,70	14969,40
SUM	3598,732	8547,842	27935,383	57627,701

	1	2	3	4
1	0,222	*0,490*	*0,835*	0,003
2	*0,382*	0,168	0,006	0,008
3	0,012	0,005	0,226	*2,693*
4	0,327	0,193	0,028	0,952
MEAN	*0,236*	*0,214*	*0,274*	*0,914*

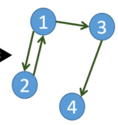

FIG. 5 – *Exemple de tableat T, A et sa prï¿½topologie des descendants*

Selon nos experts ï¿½conomistes, la mï¿½thode proposï¿½e permet de mettre en ï¿½vidence l'ï¿½volution des donnï¿½es ï¿½conomiques 1 marquï¿½e par le dï¿½veloppement d'une industrie de transformation locale au cours des deux derniï¿½res dï¿½cennies. La figure 6 montre des exemples de sous-structures k-stables maximales ï¿½ partir de 3 secteurs diffï¿½rents. Le secteur 2 (Industries agro-alimentaires) a une influence sur les secteurs 11 (Services rendus principalement aux mï¿½nages),12 (administration), 10 (Services rendus principalement aux entreprises) et 4 (Industries diverses) de 1999 ï¿½ 2015. Il y a une influence stable de certains secteurs sur d'autres. On remarque ï¿½galement que le secteur 4 est influencï¿½ indirectement par les 3 secteurs de l'exemple de la figure 6. La figure 7 montre, ï¿½ partir du jeu de

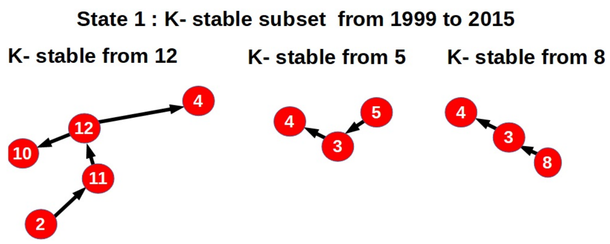

FIG. 6 – *Exemples de k-stable maximaux*

donnï¿½es ï¿½conomiques 2, l'ï¿½volution structurelle des interdï¿½pendances. A partir du secteur 2, nous obtenons, des secteurs influencï¿½s directement par ce dernier ou indirectement. La structure ï¿½volue, les influences changent dans le temps. Cette sous-structure met en ï¿½vidence le changement d'impact direct ou indirect du secteur 2 sur le secteur 9.

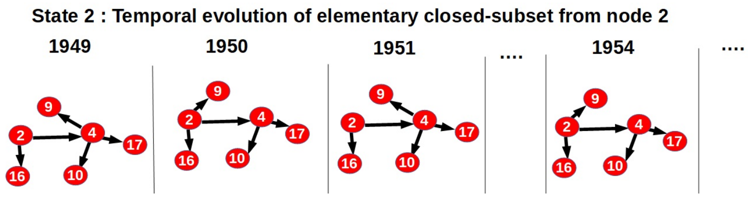

FIG. 7 – *Exemple de fermï¿½ ï¿½lï¿½mentaire temporel du secteur* 2

6 Conclusion and perspectives

Nous avons ï¿½tabli une premiï¿½re formulation de la notion d'espace prï¿½topologique temporel. A partir d'un exemple de relation temporelle, nous avons dï¿½fini l'espace temporel prï¿½topologique des descendants d'ordre p. Nous avons donnï¿½ deux nouvelles notions de sous-structures temporelles, construites par pseudo-fermeture temporelle, qui peuvent ï¿½tre extraites pour analyser les donnï¿½es d'un point de vue structurel.

Ce travail prï¿½sente de nombreuses perspectives. La premiï¿½re consiste ï¿½ optimiser les deux algorithmes. Il serait ï¿½galement intï¿½ressant d'ï¿½tudier les propriï¿½tï¿½s de ces espaces prï¿½topologiques. Enfin, le but est de combiner l'analyse structurelle au niveau des influences des individus ï¿½tudiï¿½s et les caractï¿½ristiques dï¿½crivant ces individus qui peuvent ï¿½galement changer dans le temps. Une exploration des sous-structures combinï¿½e ï¿½ l'extraction des motifs (notamment les itemsets) amï¿½nerait ï¿½ une analyse croisï¿½e. Dans l'exemple des donnï¿½es ï¿½conomiques, un point important pour les ï¿½conomistes est l'impact du seuil d'influences entre secteurs. Il serait intï¿½ressant de dï¿½finir des structures prï¿½topologiques temporelles avec des influences pondï¿½rï¿½es au lieu de ne garder que les influences importantes (au delï¿½ d'un seuil).

Dans cette ï¿½tude, la prï¿½topologie temporelle est apprï¿½hendï¿½e avec un exemple de relation binaire. Une autre perspective intï¿½ressante serait de dï¿½finir d'autres critï¿½res permettant de rechercher des sous-structures dans des donnï¿½es issues d'une famille de relations binaires.

Références

Arnaud, G., M. Lamure, M. Terrenoire, et D. Tounissoux (1986). Analysis of the connectivity of an object in a binary image : a pretopological approach. In *Proc. of the 8th IAPR Conference*.

Auray, J.-P., G. Duru, et M. Mougeot (1979). A pre-topological analysis of the input-output model. *Economics Letters 2*(4), 343–347.

Basileu, C., S. B. Amor, M. Bui, et M. Lamure (2012). Prétopologie stochastique et réseaux complexes. *Stud. Inform. Univ. 10*(2), 73–138.

Belmandt, Z. (1993). *Manuel de prétopologie et ses applications : sciences humaines et sociales, réseaux, jeux, reconnaissance des formes, processus et modèles, classification, imagerie, mathématiques*. Interdisciplinarité et nouveaux outils. Hermès.

Bui, Q. V. (2018). *Pretopology and Topic Modeling for Complex Systems Analysis : Application on Document Classification and Complex Network Analysis*. Ph. D. thesis.

Cleuziou, G., D. Buscaldi, V. Levorato, et G. Dias (2011). A pretopological framework for the automatic construction of lexical-semantic structures from texts. In *Proceedings of the 20th ACM international conference on Information and knowledge management*, pp. 2453–2456.

Dalud-Vincent, M., M. Brissaud, et M. Lamure (2001). Pretopology as an extension of graph theory : the case of strong connectivity. *Journal of Apllied Mathematics 5*(4), 455–472.

Duru, G. (1980). *Contribution à l'étude des structures des systèmes complexes dans les sciences humaines*. Ph. D. thesis.

Emptoz, H. (1983). *Modèle prétopologique pour la reconnaissance des formes application en neurophysiologie*. Ph. D. thesis, INSA DE LYON.

Lamure, M. (1987). *Espaces abstraits et reconnaissance de formes. Application au traitement des images digitales*. Ph. D. thesis, Univ. Claude Bernard Lyon 1.

Largeron, C. et S. Bonnevay (2002). A pretopological approach for structural analysis. *Information Sciences 144*(1-4), 169–185.

Le, T., N. Kabachi, et M. Lamure (2007). A clustering method associated pretopological concepts and k-means algorithm. In *Recent advances in stochastic modeling and data analysis*, pp. 529–536. World Scientific.

Leontief, W. (1986). *Input-output economics*. Oxford University Press.

Levorato, V. (2011). Modeling groups in social networks.

Selmaoui, N., C. Leschi, et H. Emptoz (1993). Crest lines detection in grey level images : Studies of different approaches and proposition of a new one. In *CAIP'93*, Volume LNCS 719, pp. 157–164.

Summary

Pretopology is a mathematical model developed from a weakening of the topological axiomatics. It was initially used in economic, social, physical and biological sciences, and next in pattern recognition and image analysis. It allows to work in a mathematical framework with weak properties, and its non idempotent operators called pseudo-closure permit to implement iterative algorithms. It proposes a formalism that generalizes graph theory concepts and models problems universally. In this paper, we will extend this model to analyze complex data with spatio-temporal dimensions. We define the notion of a temporal pretopological space based on a temporal function. We give an example of temporal function based on binary relationship and we construct a temporal pretopological space called p-order descendants. We present a two new notions of temporal sub-structures which present the sub-structure evolution over time. We propose algorithms to search this sub-structures. We experiment our proposition on 4 real datasets.